Stati miscela e Funzioni di Wigner

$\{|\psi\rangle\}$ insieme di stati (quantistici)
(nessuna caratterizzazione, solo "tanti stati")

$P(\psi)$ Probabilità che il sistema stia nello stato $|\psi\rangle$

Data una certa osservabile $\hat{O}$, il suo valor medio (che è la cosa che si "misura" dall'esterno) nel caso in cui sappiamo con certezza che il sistema è nello stato $|\psi\rangle$ è:

$$\langle \hat{O} \rangle_\psi = \langle \psi | \hat{O} | \psi \rangle$$

Se invece sappiamo solo:

a) $\{|\psi\rangle\}$ insieme degli stati possibili

b) $P(\psi)$ Probabilità che il sistema stia in $|\psi\rangle$

allora il valor medio dell'osservabile $\hat{O}$ (media su tante misure) è

$$\boxed{\langle \hat{O} \rangle_{\substack{\{|\psi\rangle\} \\ P(\psi)}} = \sum_{\{|\psi\rangle\}} \langle \psi | \hat{O} | \psi \rangle P(\psi)}$$

"media condizionata"

Un tale "stato" del sistema, in cui c'è solo l'insieme di stati possibili e le relative probabilità è detto **stato miscela**, e (non deve essere confuso con uno stato sovrapposizione di stati!)

Supponiamo che esista una **base completa di stati** per il nostro sistema $\boxed{\{|n\rangle\}_{n=1}^{\infty}}$

$$\sum_n |n\rangle\langle n| = \mathbb{1}$$
completezza

Abbiamo una base di stati, dunque possiamo **rappresentare in forma matriciale** l'operatore $\hat{O}$

$$\hat{O}_{nm} \equiv \langle m|\hat{O}|n\rangle \in \mathbb{C}$$

Ciò posto, possiamo scrivere in una forma migliore la "media condizionata"

non è necessaria l'ortogonalità degli $\{|n\rangle\}$, basta la completezza

$$\langle \hat{O} \rangle_{\substack{\{|\psi\rangle\} \\ P(\psi)}} = \sum_{\{|\psi\rangle\}} \langle \psi \underbrace{|}_{\substack{\sum_n |n\rangle\langle n| \\ = \mathbb{1}}} \hat{O} \underbrace{|}_{\substack{\sum_m |m\rangle\langle m| \\ = 1}} \psi\rangle P(\psi)$$

$$= \sum_{n,m} \sum_{\{|\psi\rangle\}} \langle \psi|n\rangle\langle n|\hat{O}|m\rangle\langle m|\psi\rangle \; P(\psi)$$

all'interno delle somme, questi sono 4 numeri, quindi li posso tranquillamente spostare (il prodotto commuta)

$$= \sum_{n,m} O_{nm} \sum_{\{|\psi\rangle\}} \langle m|\psi\rangle P(\psi) \langle \psi|n\rangle$$

a questo punto si definisce l'**operatore densità dello stato miscela**

$$\boxed{\hat{\rho} \equiv \sum_{\{|\psi\rangle\}} |\psi\rangle P(\psi) \langle \psi|}$$

(notare che $P(\psi)$ è un numero: viene messo "in mezzo" solo "per eleganza")

da cui
$$\sum_{\{|\psi\rangle\}} \langle m|\psi\rangle P(\psi) \langle \psi|n\rangle = \langle m|\Big(\sum_{\{|\psi\rangle\}} |\psi\rangle P(\psi)\langle\psi|\Big)|n\rangle = \rho_{nm}$$

e dunque
$$\langle \hat{O} \rangle_{\substack{\{|\psi\rangle\} \\ P(\psi)}} = \sum_{n,m} O_{nm} \rho_{mn}$$

$\leftarrow$ (ma $\sum_m O_{nm} \rho_{mn} = \hat{O}\hat{\rho}$ prodotto righe per colonne)

$$= \sum_n (\hat{O}\hat{\rho})_{nn} = T_r(\hat{O}\hat{\rho})$$

in definitiva, la "media condizionata" o media su uno stato miscela è

$$\boxed{\langle \hat{O} \rangle_{\substack{\{|\psi\rangle\} \\ P(\psi)}} = T_r(\hat{O}\hat{\rho})}$$

osservazione:
la traccia è indipendente dalla scelta della base

Riassumendo:
dato un sistema in uno stato miscela descritto da $\{|\psi\rangle\}$ e $P(\psi)$
e dato l'osservabile $\hat{O}$
il valor medio delle misure di $\hat{O}$ è:

$$\langle \hat{O} \rangle_{\substack{\{|\psi\rangle\} \\ P(\psi)}} = T_r(\hat{O}\,\hat{\rho})$$

$$\text{dove } \hat{\rho} \equiv \sum_{\{|\psi\rangle\}} |\psi\rangle P(\psi) \langle\psi|$$

qui è catturata tutta l'informazione sullo stato miscela

"casi particolari"

a) stati possibili = 3, stati "a caso"; base = autostati dell'op. di posizione $\{|\vec{r}\rangle\}$

$\|\psi_1\rangle$	$P_1 = 0.3$
$\|\psi_2\rangle$	$P_2 = 0.2$
$\|\psi_3\rangle$	$P_3 = 0.5$
stati possibili	probabilità

$$\hat{\rho} = |\psi_1\rangle\langle\psi_1|\,0.3 + |\psi_2\rangle\langle\psi_2|\,0.2 + |\psi_3\rangle\langle\psi_3|\,0.5$$

se usiamo come base la base delle posizioni otteniamo la seguente espressione per gli elem. di matrice di $\hat{\rho}$

$$\rho(\vec{r}\,',\vec{r}) = \langle\vec{r}\,'|\hat{\rho}|\vec{r}\rangle =$$

$$= \langle\vec{r}\,'|\psi_1\rangle\langle\psi_1|\vec{r}\rangle P_1 + \dots$$

$$= \psi_1^*(\vec{r}\,')\,\psi_1(\vec{r})\,P_1 + \dots$$

b) **stati possibili** = autostati dell'energia; **base** per la rappr. base delle posizioni

ins. stati possibili $\{|\phi_n\rangle\}_{n=0}^{\infty}$ autostati dell'energia

$$P_n = \frac{e^{-\frac{E_n}{KT}}}{\sum_m e^{-\frac{E_m}{KT}}} \qquad \hat{\rho} = \sum_n |\phi_n\rangle P_n \langle\phi_n|$$

Probabilità che il sistema si trovi in un autostato dell'energia

$$\rho(\vec{r}\,';\vec{r}) = \langle\vec{r}\,'|\hat{\rho}|\vec{r}\rangle = \sum_n \langle\vec{r}\,'|\phi_n\rangle \underbrace{P_n}_{= \frac{e^{-E_n/KT}}{\sum_m e^{-E_m/KT}}} \langle\phi_n|\vec{r}\rangle = \sum_n \phi_n^*(\vec{r}\,')\,\phi_n(\vec{r})\,P_n$$

elemento di matrice dell'op. densità

c) **stati possibili** = certi stati $\{|\psi_i\rangle\}_i = \{\psi_i(\vec{r})\}$ (Probabilità osservata: P_i); **base** = autostati dell'energia $\{|\phi_n\rangle\}_{n=0}^{\infty}$

$$\hat{\rho} = \sum_i |\psi_i\rangle P_i \langle\psi_i|\,; \quad \rho_{nm} = \sum_i \langle\phi_n|\psi_i\rangle P_i \langle\psi_i|\phi_m\rangle = \sum_i C_n^{*(i)} C_m^{(i)} P_i$$

dove le $C_n^{(i)}$ sono i coeff. dello sviluppo degli stati $|\psi_i\rangle$ sull'autob. dell'energia

$$|\psi_i\rangle = \sum_n \langle\phi_n|\psi_i\rangle\,|\phi_n\rangle = \sum_n C_n^{(i)}\,|\phi_n\rangle$$