Relazione di indeterminazione e stati squeezed

Richiamiamo il **principio di indeterminazione**:

Date due osservabili fisiche non commutanti $\hat{A}$ e $\hat{B}$ tali che $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{C}$ si ha

$$\boxed{\Delta A_\psi \Delta B_\psi \geq \frac{|\langle \hat{C} \rangle_\psi|}{2}}$$

relazione di indeterminazione di Heisemberg

Osserviamo che le tre grandezze in gioco nella precedente disuguaglianza sono "calcolate su uno stato", infatti

$$\Delta A \equiv \sqrt{\langle \psi | \hat{A}^2 | \psi \rangle - \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle^2}$$

$$\langle \hat{C} \rangle = \langle \psi | \hat{C} | \psi \rangle$$

La relazione di indeterminazione è sempre soddisfatta. Tuttavia si tratta di una disuguaglianza: ci sono degli stati e delle osservabili per i quali tale relazione è soddisfatta col segno di uguaglianza. Questi stati sono detti **stati a minima indeterminazione rispetto alla coppia di osservabili coniugate**

$$\psi : \quad \Delta A_\psi \Delta B_\psi = \frac{|\langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle_\psi|}{2}$$

Nell'ambito degli stati a minima indeterminazione, esistono poi gli **stati squeezed**, caratterizzati dal fatto che le due incertezze non sono uguali.

Se ad esempio $\psi : \Delta A_\psi < \Delta B_\psi \Rightarrow \boxed{(\Delta A_\psi)^2 < \frac{\langle \hat{C} \rangle_\psi}{2}}$

In questo caso si dice che ψ è squeezed rispetto all'osservabile $\hat{A}$.

Fin qui abbiamo parlato in astratto, Ora
Ora considerando che il modello quantizzato della radiazione descrive queste come un insieme di oscillatori armonici, discutiamo di squeezing trattando il caso concreto di osc. arm.

Consideriamo le due osservabili coniugate posizione e momento lineare

$\hat{x}$, $\hat{p}$, per le quali si ha $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$

Osservazioni preliminari studio analitico degli stati coerenti

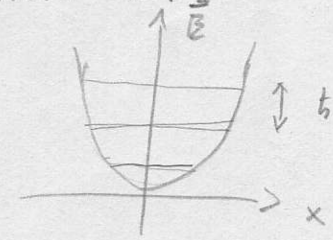
Partiamo dal potenziale (classico) dell'O.A. :

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} k x^2$$

$$= \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$$

Sappiamo che i livelli energetici quantistici sono **equispaziati.**

Graficamente :



Se modifichiamo il potenziale aggiungendo un termine lineare in x questo non modifica la struttura dei livelli energetici; in quanto c'è solo uno shift di tutta la struttura :

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \quad \rightarrow \quad \mathcal{U}' = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 + \alpha x$$

se pongo $\boxed{\alpha = -m\omega^2 x_0}$ ho $\mathcal{U}' = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 - m\omega^2 x_0 x$ aggiungo e sottraggo

(NB. $\alpha \in \mathbb{C}$, $Re(\alpha) = -m\omega^2 x_0$)

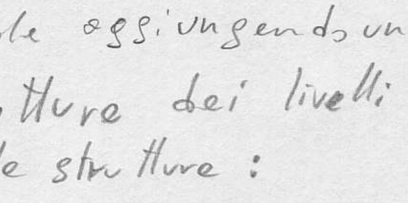
$$= \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 - m\omega^2 x_0 x + \frac{1}{2} m\omega^2 x_0^2 - \frac{1}{2} m\omega^2 x_0^2$$

mettendo in evidenza

$$= \frac{1}{2} m\omega^2 (x^2 - 2x_0 x + x_0^2) - \frac{1}{2} m\omega^2 x_0^2$$

$$\mathcal{U}' = \frac{1}{2} m\omega^2 (x - x_0)^2 - \frac{1}{2} m\omega^2 x_0^2$$

dunque graficamente lo spostamento è così →



Quanto visto per il potenziale (termine lineare -> spostamento) vale anche per le autofunzioni dell'energia (autostati):

data la funzione d'onda dello stato fondamentale dell'oscer. arm. (unidim)

$$\psi_0(x) = N e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

gaussiana centrata nell'origine

(il prof. ricava questa funzione risolvendo l'eq. agli autovalori $\hat{a}\psi_0(x) = 0\,\psi_x(x)$
dove $\hat{a} = \sqrt{}\,(m\omega\hat{x} - i\hat{p})$ e $\begin{cases}\hat{x} = x \\ \hat{p} = -i\hbar\frac{d}{dx}\end{cases}$ => $\hat{a}\psi = 0\psi$ diventa un'eq. diff.)

Se aggiungiamo un termine lineare in x al potenziale, questo provoca uno spostamento $x \to x - x_0$ => spostam. del potenziale => => spostam. delle funz. d'onda:

$$\psi_0(x) \to \psi_{0\alpha}(x) = N e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}(x-x_0)^2}$$

dunque una gaussiana con eguale larghezza ma con centro spostato.

Se consideriamo poi l'evoluzione temporale di questa funzione d'onda, troviamo una gaussiana

$$\psi_{0\alpha}(x,t) = N e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}(x - q_0\cos\omega t)^2}$$

dunque una gaussiana che "oscilla rigidamente", mantenendo la sua larghezza mentre il suo centro oscilla.

Ma chi sono questi "stati spostati"? Li abbiamo ottenuti aggiungendo un termine lineare in x al potenziale. Ma $\hat{x} \propto \hat{a} + \hat{a}^+$.

D'altra parte abbiamo incontrato l'operatore di spostamento che applicato allo stato di vuoto fornisce gli stati squeezed

$$\boxed{D(\alpha) = e^{\alpha\hat{a}^+ - \alpha^*\hat{a}}}$$

N.B. si tratta di considerazioni non rigorose!

Fine osservaz. preliminari

Concludiamo che queste "gaussiane spostate" rappresentano stati coerenti (la coerenza può essere collegata al fatto che la larghezza è costante)