Stati coerenti

É possibile introdurre gli stati coerenti come quegli stati del campo elettromagnetico che sono "generati" da una corrente classica (ad esempio la corrente che scorre in un'antenna). Questa introduzione la scrivo aparte, e qui introduciamo gli stati coerenti "formalmente".

Operatore di spostamento

$$\hat{D}(\alpha) \equiv e^{\alpha \hat{a}^+ - \alpha^* \hat{a}}$$

Questo operatore, applicato allo stato di vuoto, da' come risultato uno stato che e' detto **stato coerente**:

$$\hat{D}(\alpha)|0\rangle = e^{\alpha \hat{a}^+ - \alpha^* \hat{a}}|0\rangle = \underbrace{|\alpha\rangle}_{\text{stato coerente}}$$

dove α e' un parametro complesso

Le proprietá degli stati coerenti sono legate alle proprietá dell'operatore di spostamento.

Definiamo gli "operatori ausiliari"

$$\begin{cases} \hat{A} \equiv \alpha \hat{a}^+ \\ \hat{B} \equiv -\alpha^* \hat{a} \end{cases} \Rightarrow \hat{D}(\alpha) = e^{\hat{A}+\hat{B}}$$

dalle proprietá di commutazione $[\hat{a}, \hat{a}^+] = 1$ discende

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \alpha \hat{a}^+(-\alpha^* \hat{a}) - \alpha^* \hat{a}(-\alpha \hat{a}^+) = -\alpha\alpha^* \hat{a}^+\hat{a} + \alpha\alpha^* \hat{a}\hat{a}^+ =$$

$$= |\alpha|^2 \underbrace{[\hat{a}, \hat{a}^+]}_{1} = |\alpha|^2 \in \mathbb{R}$$

(ma tutti gli op. commutano con i "numeri": $[\hat{A},\hat{B}] = |\alpha|^2$)

Teorema, se $\hat{A}$ e $\hat{B}$ commutano con il loro commutatore $\left([\hat{A},[\hat{A},\hat{B}]] = [\hat{B},[\hat{A},\hat{B}]] = 0\right)$

allora si ha $\boxed{e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{\hat{A}}\, e^{\hat{B}}\, e^{-\frac{1}{2}[\hat{A},\hat{B}]}}$ formula di Weil o di Baker-Hausdorff

Dunque $D(\alpha) = e^{\alpha \hat{a}^+ - \alpha^* \hat{a}} = e^{\alpha \hat{a}^+} e^{-\alpha^* \hat{a}} e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}$

$\boxed{\text{Osservazione}}$: quando scriviamo $D(\alpha) = e^{\alpha \hat{a}^+ - \alpha^* \hat{a}}$ gli op. $\hat{a}^+$ e $\hat{a}$ sono sommati, e dunque è improprio dire che sono in "forma normale", sebbene $\hat{a}^+$ stia a sinistra e $\hat{a}$ a destra.
Quando invece scriviamo $e^{\alpha \hat{a}^+} e^{-\alpha^* \hat{a}} e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}$, i due op. sono moltiplicati (anche se "esponenziati") e dunque è più proprio parlare di **ordine normale**

Se partiamo dalla forma

$$D(\alpha) = e^{-\alpha^* \hat{a} + \alpha \hat{a}^+}$$

(notare che la somma di operatori è commutativa!)

si ha

$$[\hat{B}, \hat{A}] = -[\hat{A}, \hat{B}] = -|\alpha|^2$$ da cui

$$\hat{D}(\alpha) = e^{-\alpha^* \hat{a} + \alpha \hat{a}^+} = e^{-\alpha^* \hat{a}} e^{\alpha \hat{a}^+} e^{\frac{1}{2}|\alpha|^2}$$

che è in **ordine antinormale**

ricapitolando

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{D}(\alpha) &= e^{\alpha \hat{a}^+} e^{-\alpha^* \hat{a}} e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} && \text{ordine normale} \\ &= e^{-\alpha^* \hat{a}} e^{\alpha \hat{a}^+} e^{\frac{1}{2}|\alpha|^2} && \text{ordine antinormale} \end{aligned}}$$

Proprietà:

$\hat{D}(\alpha)$ è **unitario** $\Leftrightarrow D(\alpha) D^+(\alpha) = \mathbb{1}$

inoltre $D^+(\alpha) \overset{\Downarrow}{=} D^{-1}(\alpha) = D(-\alpha)$.

Vogliamo studiare $D^{-1}(\alpha)\ \hat{a}\ D(\alpha)$

Per fare ciò dimostriamo prima un **lemma**

$$[\hat{a}, \hat{a}^{+n}] = n\,\hat{a}^{+\,n-1}.$$

dim (per induzione),

$n=1 \rightarrow [\hat{a}, \hat{a}^{+}] = \mathbb{1}$

[...]

analogamente si dimostra l'altro **lemma**

$$[\hat{a}^{n}, \hat{a}^{+}] = n\,\hat{a}^{\,n-1}$$

dim

[...]

Da questi due lemmi ne discendono altri due:

Data la **funzione di operatori** $f(\hat{a}^{+})$ sviluppabile in serie di potenze di operatori attorno all' "origine", cioè tale che

$$f(\hat{a}^{+}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}_{(0)}\ \hat{a}^{+n}$$

$$= C_n\ \hat{a}^{+n}$$

applicando i due lemmi visti prima si ha

$$[\hat{a}, f(\hat{a}^{+})] \underset{\substack{\uparrow \\ \text{il commutat.} \\ \text{è lineare}}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} c_n [\hat{a}, \hat{a}^{+n}] = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\, n\,\hat{a}^{+\,n-1} \underset{\substack{\nearrow \\ \text{derivata} \\ \text{"termine a termine"}}}{=} \frac{\partial}{\partial \hat{a}^{+}} f(\hat{a}^{+})$$

riassumendo

$$\boxed{[\hat{a}, f(\hat{a}^{+})] = \frac{\partial f(\hat{a}^{+})}{\partial \hat{a}^{+}}}.$$

lemma analogo $\boxed{[f(\hat{a}), \hat{a}^{+}] = \dfrac{\partial f(\hat{a})}{\partial \hat{a}}}$