Generazione di seconda armonica

(Second Harmonic Generation)

La generazione di seconda armonica è un caso particolare dell'interazione a tre onde che viene fuori dalla formulazione elettromagnetica dell'interazione non lineare (vedi)

Le equazioni generali per l'interazione a 3 onde trovate sono:

$$
\begin{cases}
\dfrac{dA_3}{dz} = -\dfrac{\alpha_3}{2} A_3 + ig\, A_1 A_2\, e^{-i\Delta K z} \\[2ex]
\dfrac{dA_1}{dz} = -\dfrac{\alpha_1}{2} A_1 + ig\, A_2^* A_3\, e^{i\Delta K z} \\[2ex]
\dfrac{dA_2}{dz} = \dfrac{\alpha_2}{2} A_2 + ig\, A_3 A_1^*\, e^{i\Delta K z}
\end{cases}
$$

nel caso particolare di **SHG** si ha

$$
\begin{aligned}
&\omega_1 = \omega_2 = \omega \\
&\omega_3 = \omega_1 + \omega_2 = 2\omega
\end{aligned}
$$

e il phase mismatch

$$\Delta K = K_3 - K_1 - K_2 = K_{2\omega} - 2K_\omega$$

dunque le seconde due equazioni diventano identiche, e il sistema si riduce ad un sist. di due eq.

$$
\begin{cases}
\dfrac{dA_{2\omega}}{dz} = -\dfrac{\alpha_{2\omega}}{2} A_{2\omega} + ig\, A_\omega^2\, e^{-i\Delta K z} \\[2ex]
\dfrac{dA_\omega}{dz} = -\dfrac{\alpha_\omega}{2} A_\omega + ig\, A_{2\omega} A_\omega^*\, e^{i\Delta K z} \\[2ex]
\dfrac{dA_\omega}{dz} = -\dfrac{\alpha_\omega}{2} A_\omega + ig\, A_{2\omega} A_\omega^*\, e^{i\Delta K z}
\end{cases}
$$

Inoltre, se consideriamo **mezzi trasparenti**, vanno via i primi termini al secondo membro, che descrivono l'assorbimento:

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{dA_{2\omega}}{dz} = i g A_\omega^2 e^{-i\Delta K z} \\ \dfrac{dA_\omega}{dz} = i g A_{2\omega} A_\omega^* e^{i\Delta K z} \end{cases}}$$

N.B.
sono 4 eq. perché c'è
parte reale e parte immaginaria

da risolvere con certe condizioni iniziali $\begin{cases} A_\omega(0) = A_\omega^0 \\ A_{2\omega}(0) = A_{2\omega}^0 \end{cases}$

le relazioni di conservazione (di energia o di flusso di fotoni) di Manley-Rowe sono ridotte alle sole

$$\boxed{|A_{2\omega}|^2 + |A_\omega|^2 = cost} \quad \text{Manley - Rowe}$$

Risolvere questo sistema è complicato: lo affronteremo nel caso particolare di **non svuotamento della pompa**

Il fascio di **pompa** è il fascio in ingresso a **frequenza ω**

quindi $A_\omega \simeq cost$ (questo significa anche $|A_{2\omega}| \ll 1$

In quest'ipotesi le $\frac{dA_\omega}{dz} = 0$, cioè "è come se" $g = 0$ nella seconda equazione.

Consideriamo dunque la prima equazione: la A_ω non è più una funzione di z ma **una** costante:

$$\frac{dA_{2\omega}}{dz} = i g A_\omega^{0\,2} e^{-i\Delta K z}$$

risolviamo portando dz a destra e integrando

$$\int d A_{2\omega}(z) = i g A_\omega^{0\,2} \int_0^z e^{-i\Delta K z'} dz'$$

$$A_{2\omega}(z) = i g A_\omega^{0\,2} \frac{1}{-i\Delta K} \left[e^{-i\Delta K z} - 1 \right]$$

razionalizzando

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$
$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$
$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$
$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$= -g A_\omega^{0\,2} \frac{e^{-i\Delta K z} - 1}{\Delta K}$$

$$= g A_\omega^{0\,2} \frac{1 - e^{-i\Delta K z}}{\Delta K}$$

molt. e dividendo per $e^{-i\frac{\Delta K}{2}z}$

$$= g A_\omega^{0\,2} \frac{\left(e^{-i\frac{\Delta K}{2}z} e^{i\frac{\Delta K}{2}z}\right) - e^{-i\frac{\Delta K}{2}z} e^{-i\frac{\Delta K}{2}z}}{\Delta K}$$

$$= g A_\omega^{0\,2} \frac{e^{-i\frac{\Delta K}{2}z}}{e^{-i\frac{\Delta K}{2}z}} \quad '' \quad '' \quad = g A_\omega^{0\,2} e^{-i\frac{\Delta K}{2}z} \frac{e^{i\frac{\Delta K}{2}z} - e^{-i\frac{\Delta K}{2}z}}{\Delta K}$$