Formulazione elettromagnetica dell'interazione non lineare
(interazione a tre onde)

Partiamo dalle eq. di Maxwell.
Si mette anche il termine della **corrente** (come sorgente del campo magnetico) per tenere conto dell' **assorbimento** (non ho capito bene perché).
Consideriamo solo le equazioni dei rotori, perché quelle delle divergenze le consideriamo soddisfatte, dando per assunta la trasversalità dei campi:

$$\begin{cases} \text{rot}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{rot}\,\vec{H} = \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j} \end{cases}$$

Ora, usiamo le relazioni costitutive esplicitando $\vec{B}$ e $\vec{D}$, e la corrente la scriviamo proporzionale al campo elettrico ($\vec{j} = \sigma \vec{E}$, ma σ non è la conducibilità, è solo un coeff. che descrive l'assorbimento.)

$$\begin{cases} \text{rot}\,\vec{E} = -\mu_0 \dfrac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \text{rot}\,\vec{H} = \underbrace{\sigma \vec{E}}_{\vec{j}} + \overbrace{\varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \varepsilon_0 \chi^L \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \dfrac{\partial \vec{P}^{NL}}{\partial t}}^{\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}} \end{cases}$$

raccogliamo il secondo e terzo termine del membro di destra della 2ª eq. introducendo la costante dielettrica del materiale $\varepsilon = \varepsilon_0 (1 + \chi^L)$

$$\begin{cases} \text{rot}\,\vec{H} = \sigma \vec{E} + \varepsilon \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \dfrac{\partial P^{NL}}{\partial t} \\ \text{rot}\,\vec{E} = -\mu \dfrac{\partial \vec{H}}{\partial t} \end{cases}$$

Ora, come fatto a Fisica II facciamo il rotore della 2ª eq.

$$\text{rot}\,\text{rot}\,\vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\,\text{rot}\,\vec{H}$$

ora usiamo a sinistra la relazione vettoriale $\text{rot}\,\text{rot}\,\vec{E} = \text{grad}\,\underbrace{\text{div}\,\vec{E}}_{0} - \nabla^2 \vec{E}$
e a destra sostituiamo la prima equazione

$$\boxed{\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \sigma \frac{\partial}{\partial t}\vec{E} + \mu_0 \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E} + \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}^{NL}}{\partial t^2}}$$

eq. delle onde con assorbimento e termine non lineare questa è un eq. diff. in $\vec{E}$. L'equazione

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu_0 \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial^2 t} = 0$$ (eq. dei telegrafisti)

che si ottiene dalla precedente eliminando il termine con la polarizzazione non lineare è nota come equazione dei telegrafisti perché descrive la propagazione di un'onda e.m. in un mezzo tenendo conto dell'assorbimento e della sola polarizzazione lineare (segnale in un cavo elettrico).

Nel nostro caso invece teniamo conto anche della polarizzazione non lineare.

Affrontiamo quest'equazione delle onde.

Usiamo un "approccio" simile a quello visto per il modello classico di Bloembergen.

(Qua ho delle perplessità, e le frasi che seguono sono "un'ipotesi")

Fin'ora abbiamo descritto la situazione come: c'è un campo "in ingresso" a frequenza ω (fondamentale) e questo, tramite la polarizzazione, "crea" nel cristallo non lineare due onde e.m. di "risposta": una a freq. ω e un'altra a freq. 2ω. (la polarizzaz. è "sorgente" nelle eq. di Maxwell)

Ora vogliamo "generalizzare" la situazione, e facciamo un'ansatz più generico: ipotizziamo che il campo elettrico dell'onda e.m. soluzione di questa eq. delle onde ha tre componenti monocromatiche (polarizzate lungo tre direzioni diverse) a frequenze ω_1, ω_2, e $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$. Questo "caso generale" include come "caso particolare" la situazione con $\omega_1 = \omega$ onda "in ingresso" $\omega_2 = 2\omega$ "onda in uscita a freq. fondamentale" e $\omega_3 = 2\omega$ "onda in uscita a freq. di seconda armonica".

L'ansatz è dunque:

$$\boxed{\vec{E} = \hat{i}\,\frac{1}{2} E_3\, e^{i(K_3 z - \omega_3 t)} + \hat{j}\,\frac{1}{2} E_1\, e^{i(K_1 z - \omega_1 t)} + \hat{k}\,\frac{1}{2} E_2\, e^{i(K_2 z - \omega_2 t)} + cc}$$

Aggiungiamo qualche dettaglio: le tre polarizzazioni sono comunque nel piano ⊥ all'asse z che si prende come direz. di propagazione.

Se lavoriamo in campo complesso possiamo omettere i fattori ½ e il "+cc" finale, salvo poi a tornare in campo reale alla fine dei conti.