

# Interferenza

(Lezione 21)

Abbiamo studiato i modi in una cavità ottica, sotto vari aspetti.  
Adesso vogliamo studiare la larghezza spettrale del singolo modo in una cavità.

Per fare questo abbiamo bisogno di richiamare alcune cose della teoria dell'interferenza.

Partiamo dall'interferenza alla Young.

Secondo questo approccio, partiamo da due sorgenti coerenti (relazione di fase costante nel tempo).

Per ottenere due sorgenti coerenti in genere si parte da una singola sorgente e la si divide in due.

L'esperimento di interferenza alla Young 'tipico' è l'esperimento della doppia fenditura.

Se ci si mette ad una certa distanza dalle due fenditure si osserva un sistema di frange di interferenza, cioè di massimi e minimi di intensità.

Le posizioni dei massimi e dei minimi, sull'asse dello schermo perpendicolare alle fenditure sono date da :

$$y_{\max} = \frac{s}{a} m \lambda ; \quad y_{\min} = \frac{s}{a} m \frac{\lambda}{2}$$

dove  $s$  è la distanza tra lo schermo e le fenditure, e  $a$  è la distanza tra le fenditure.

Vediamo che in questo modo si possono fare delle misure della lunghezza d'onda.

A proposito del sistema di frange, si osserva che l'intensità dei massimi decresce man mano che ci allontaniamo dal punto dello schermo direttamente affacciato alle fenditure.

Dunque è opportuno definire il contrasto (o visibilità) del sistema di frange, in funzione dei valori minimi e massimi delle intensità nel modo seguente :

$$V \equiv \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$$

Se il minimo è proprio 'buio' il contrasto è pari a 1.

La singola onda emessa dalla singola fenditura è un'onda sferica, e dunque la sua

intensità diminuisce come  $1/r^2$ .

Tuttavia si vede che l' intensità dei massimi (e minimi) del sistema di frange, man mano che ci si sposta sullo schermo a partire dal punto 'centrale' (asse y), diminuiscono molto più rapidamente di  $1/r^2$ .

Per spiegare questo bisogna partire dal fatto che in generale le sorgenti emettono radiazione composta da tanti 'pacchetti'.

Ogni pacchetto è emesso da un certo processo di emissione (emissione spontanea), che ha una certa durata caratteristica, e dunque moltiplicando questo tempo caratteristico per la velocità della luce abbiamo la 'lunghezza caratteristica' del 'pacchetto' (treno d'onda).

Il singolo pacchetto arriva sulla doppia fenditura e si divide in due pacchetti, della stessa lunghezza e che viaggiano alla stessa velocità.

Man mano che ci spostiamo dalla direzione perpendicolare alla congiungente sorgente - doppia fenditura, i due treni d'onda shiftano l'uno rispetto all'altro. Quando siamo molto spostati si ha che il secondo pacchetto arriva sullo schermo quando il primo pacchetto è già tutto arrivato. Oppure può succedere che un pacchetto di una fenditura si trova a sovrapporsi con un pacchetto dell'altra fenditura che però non è il suo 'gemello', proveniente dallo stesso pacchetto iniziale e splittato in due. Essendo in singoli processi di emissione 'spontanei', questi due pacchetti non hanno una relazione di fase fissata, e dunque non fanno interferenza.

Dunque questo è il motivo per cui l'interferenza non si osserva più 'ad una certa distanza dal centro'.

Data una certa radiazione, con una certa larghezza in frequenza (una certa monocromaticità), si dimostra che questa larghezza in frequenza è inversamente proporzionale al tempo di coerenza, e quindi alla lunghezza di coerenza.

Questa cosa si può vedere anche pensando alla trasformata di Fourier : passando dal dominio del tempo a quello delle frequenze, se l'intervallo di tempo del 'treno di radiazione' è piccolo, l'intervallo di frequenze è grande.

(il prof non definisce esplicitamente questo tempo di coerenza, ma credo sia il tempo medio di emissione del processo spontaneo, vedi lucidi pag 418).

quando ci si allontana dal 'centro dello schermo' di una distanza paragonabile con la lunghezza di coerenza, le frange cominciano a 'sparire'.

Allora, se si misura la distanza a cui le frange cominciano a sparire si può risalire alla larghezza spettrale della radiazione, cioè a quanto è monocromatica la radiazione.

- Esempio numerico

Per una lampada di sodio, se isoliamo una delle due componenti del doppietto, abbiamo una larghezza di riga di 1 GHz (questa larghezza ricordiamo è dovuta all'allargamento Doppler, e non è la larghezza naturale!).

L'ordine di grandezza del tempo di coerenza, che è l'inverso dell'ordine di grandezza della larghezza di riga, è del nanosecondo.

In altre parole il tempo di coerenza è la vita media del livello eccitato, cioè il tempo medio di emissione, cioè la durata temporale media del treno d'onda.

La lunghezza di coerenza, pari al tempo di coerenza per la velocità della luce, viene dell'ordine di  $10^{-9} \text{ s} \times 10^8 \text{ m/s} = 10 \text{ cm}$  (30 cm).

Dunque il pattern di interferenza sparisce ad una trentina di centimetri dal centro dello schermo.

### - Interferenza alla Michelson (13' 30")

Un altro modo di investigare il grado di coerenza di una radiazione è usare l'interferenza alla Michelson.

L'esperimento (o interferometro) di Young è basato sulla divisione del fronte d'onda.

L'interferometro di Michelson è invece l'archetipo di un'altro tipo di interferometri, in cui viene suddivisa una radiazione iniziale in due raggi, selezionando due porzioni di 'ampiezza' (intensità?), ad esempio con un beam splitter (vedi figura a pag 419 dei lucidi).

L'interferometro di Michelson è tale che solo alcune frequenze fanno interferenza costruttiva. Dunque tale interferometro si può usare come un filtro.

Infatti, se mettiamo un rivelatore sulla 'porta 2' dell'interferometro (l'altra rispetto alla sorgente) l'intensità al rivelatore è data da

$$I = \frac{I_0}{2} (1 + \cos \Delta) \quad (\text{formula per l'interferenza nell'interferometro}$$

Michelson)

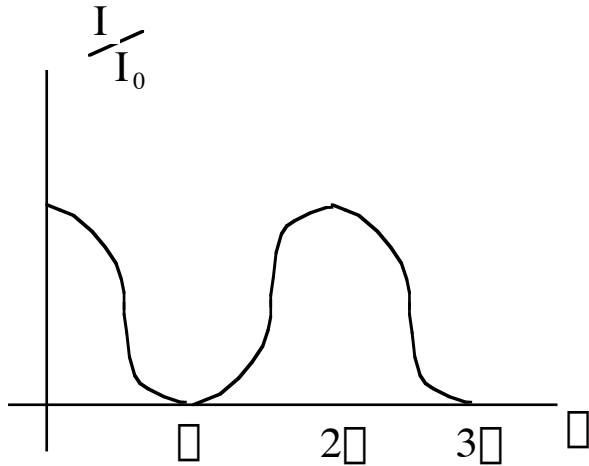
dove  $I_0$  è l'intensità della radiazione entrante nell'interferometro, e

$$\Delta = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta l$$

è la differenza di fase accumulata dai due fasci a causa del diverso cammino ottico  $\Delta l = l_1 - l_2$  (ci sarebbe anche l'indice di rifrazione, ma è lo stesso per i due bracci e si può omettere).

Questo è un caso particolare, della formula più generale, in cui non compare il 2 al denominatore, ma a fattore. La differenza è che nell'interferometro Michelson il fascio iniziale si sdoppia nel bs, e quindi l'intensità è la metà.

Al variare della differenza di fase l'andamento dell'intensità ha dunque dei massimi e dei minimi :



Allora, fissata la differenza di lunghezza dei due bracci  $\Delta l$ , solo le lunghezze d'onda tali che  $\Delta = 2\pi$  fanno interferenza costruttiva e 'passano' dall'interferometro :

$$\Delta = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta l = 2\pi n$$

Dunque l'interferometro funziona come un *filtro*.

Le lunghezze d'onda che passano sono

$$\frac{1}{\lambda} \Delta l = n$$

$$\lambda = \frac{\Delta l}{n}$$

Dunque, se ad esempio nell'interferometro entra luce bianca, al rivelatore arriveranno solo lunghezze d'onda sottomultiple (e dunque frequenze multiple) di quella pari alla differenza di lunghezza dei due cammini ottici.

Questo fatto ci chiarisce anche il nome "free spectral range" : si tratta dell'intervallo di frequenza che intercorre tra una 'frequenza permessa' e la successiva.

Se la luce policromatica che entra nell'interferometro ha una larghezza spettrale

minore del FSR all'uscita ci sarà al più una sola frequenza.

(20')

Viceversa, se si fa variare la distanza di uno dei due specchi (micrometricamente), si può usare l'interferometro come uno spettroscopio.

Infatti si può rivelare l'intensità in uscita al variare della posizione di uno specchio, e dunque della differenza di cammino  $\Delta l$ . Si dimostra che la trasformata di Fourier di questa 'funzione' è lo spettro in frequenza della radiazione in ingresso.

Questa tecnica si definisce "spettroscopia in trasformata di Fourier".

Questo interferometro si può usare per analizzare lo spettro in frequenza di una radiazione, o per misurarne la larghezza di riga.

Questa seconda cosa si fa in maniera analoga a quanto visto per l'interferenza alla Young (doppia fenditura).

Infatti ricordiamo che il processo di interferenza avviene solo se i due pacchetti d'onda dei due 'segnali' che devono interferire sono sovrapposti. Dunque, spostando uno dei due specchi, ad un certo punto il cammino ottico differisce di più della lunghezza del pacchetto d'onda, e dunque cessa il fenomeno di interferenza.

A tal riguardo notiamo che l'intensità che arriva al rivelatore è la somma delle intensità delle due porzioni di radiazione, in quanto le intensità sono 'scorrelate'.

Se chiamiamo  $E_1(\vec{r}, t)$  e  $E_2(\vec{r}, t)$  i due campi, l'intensità che arriva al rivelatore si guarda bene dall'essere pari a

$$I = |E_1 + E_2|^2$$

(in tal caso ci sarebbe il doppio prodotto) che è il conto da fare se le due radiazioni sono correlate.

L'espressione corretta è invece :

$$I = I_1 + I_2 \propto |E_1|^2 + |E_2|^2.$$

tuttavia, quando la differenza di cammino ottico è tale che 'la luce passa' (interferenza costruttiva) nei fatti non si osserva 'tutta luce', ma si osserva un sistema di frange circolari.

Il motivo è che i fronti d'onda sono sì piani, ma sono limitati, e dunque l'approssimazione di onda piana che si usa nei conti è appunto un'approssimazione!

Non c'è dunque mai interferenza completamente costruttiva o interferenza distruttiva.

Matematicamente possiamo vedere la cosa così : nel dominio delle lunghezze il fronte d'onda è limitato, dunque quando facciamo la trasformata di Fourier e passiamo ai vettori d'onda, non abbiamo una 'delta di Dirac', cioè un solo vettore d'onda, ma un vettore d'onda 'principale' ed altri secondari.

Essendo il vettore d'onda responsabile della direzione di propagazione, questa può essere vista come la 'spiegazione' delle frange di interferenza, di forma circolare.

Dunque l'alternarsi di luce e buio all'uscita al variare della differenza di cammino ottico  $\Delta l$  è l'interferenza 'vera e propria', mentre le frange circolari d'interferenza sono dovute alla 'finitezza' dei fronti d'onda.

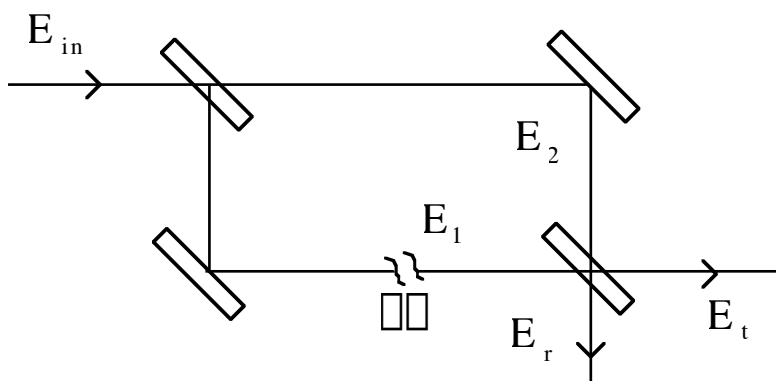
Questo tipo di interferometro può essere usato come un sensibilissimo misuratore di posizione (la posizione di uno dei due specchi), e la sensibilità è dell'ordine di metà della lunghezza d'onda della radiazione che essi utilizza, o anche meno, se riusciamo ad apprezzare le diverse intensità tra il massimo e il minimo.

Altra applicazione, la misura dell'indice di rifrazione : se in uno dei due bracci si mette una cella con del gas, se ne può stimare l'indice di rifrazione in base alla variazione di interferenza tra la situazione 'con' e la situazione 'senza cella'.

Adirittura, se poi la frequenza della radiazione è prossima alla frequenza di risonanza di una transizione del gas, la differenza dovuta alla variazione di indice di rifrazione sarà ancora più evidente (dispersione anomala)!

#### - interferometro Mac - Zender

Un interferometro simile a quello di Michelson, ma più facile da 'allineare' è quello Mac - Zender :



Altro interferometro, simile a questo, è l'interferometro di Segnac.

Il prof non lo descrive, ma accenna all'effetto Segnac, per rivelare il quale fu progettato questo interferometro di Segnac.

L'effetto Segnac è un effetto di variazione di fase della radiazione che si propaga in un fluido se questo fluido si muove (effetto di trascinamento).

Si mette un tubo pieno di fluido in movimento su uno dei due rami dell'interferometro e si misura lo spostamento delle frange inseguito al movimento del fluido.

Con questo interferometro si può realizzare un giroscopio (per riferimenti su questo effetto vedi sul testo di Hecht).

- la cavità Fabry - Perot come interferometro  
( $\approx 32'$ )

nota sui nomi :

in generale si definisce Fabry - Perot una qualunque cavità con due specchi. Anche se storicamente il nome è specifico di quelle a specchi piani e paralleli, oramai si è esteso, e dunque si specifica esplicitamente 'a specchi piani e paralleli'.

Si definisce '*etalon*' invece una cavità costituita da una lastra di materiale ottico con le due facce riflettenti 'verso l'interno'.

In questo modo che la cavità coincide con la lastra stessa.

- **La cavità Fabry-Perot come interferometro**  
( $33'30''$ ) (pag 422 dei lucidi)

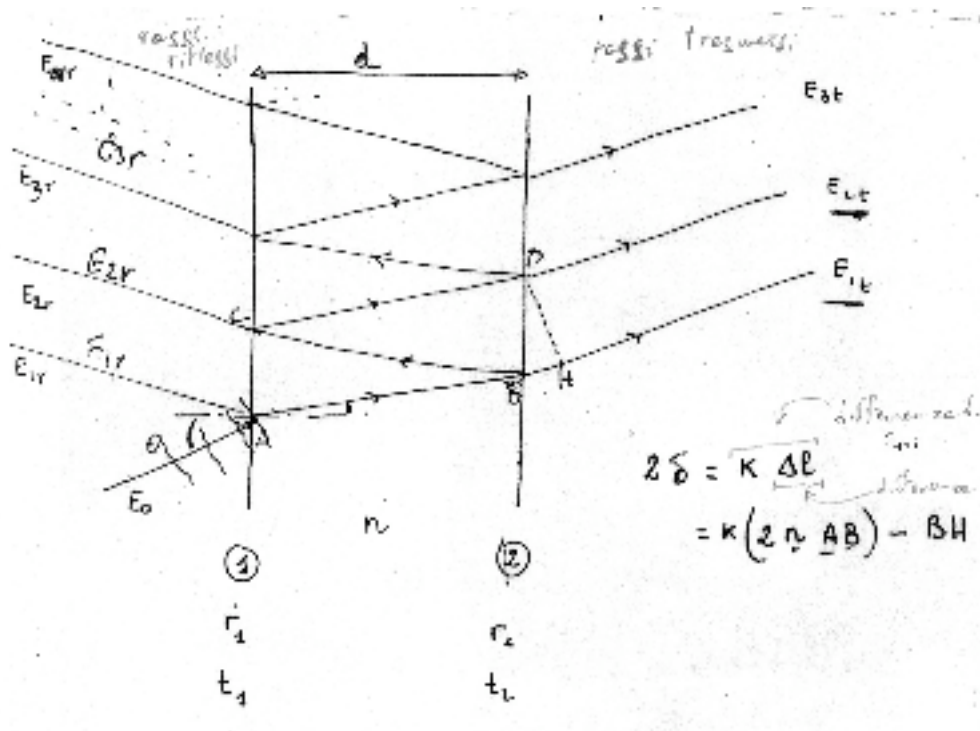
Consideriamo del tutto in generale due piani, con riflettività non 100% (semiriflettenti), che separano tre regioni di spazio con indice di rifrazione diverso.

Per semplicità possiamo immaginare una lastra di vetro o altro materiale trasparente.

Se della luce arriva su una delle superfici, in parte viene riflessa e in parte viene rifratta.

A sua volta, la radiazione che 'riesce a entrare', quando arriva sull'altra faccia, in parte viene riflessa e torna indietro nella 'cavità', e in parte viene rifratta e ne esce.

Questa cosa si ripete più volte, con un percorso a zig zag dentro la 'cavità' :



Abbiamo dunque tre famiglie di raggi : una di raggi che 'oscillano' nella cavità, una di raggi paralleli che escono dalla cavità dall'altro lato (trasmissione), e una di raggi paralleli che tornano indietro (riflessione).

consideriamo due raggi paralleli che emergono dalla cavità in trasmissione.

Uno dei due raggi ha fatto un percorso di 'avanti e indietro' nella cavità in più rispetto all'altro.

Dunque la loro differenza di fase è data da :

$$2\delta = k \Delta l = k[(2n AB) - BH]$$

dove  $2AB$  è la differenza di percorso all'interno della lastra, e  $BH$  è la differenza di percorso all'esterno (vedi figura precedente).

Se chiamiamo con  $t_1$  e  $t_2$  le trasmittività e con  $r_1$  e  $r_2$  le riflettività delle due superfici di separazione, abbiamo che, se  $E_0$  è il campo 'originario' che arriva da un lato della lastra, i due campi dei due raggi paralleli che emergono sono

$$E_{1t} = E_0 t_1 t_2 e^{i\phi t} e^{i\phi'}$$

$$E_{2t} = E_0 t_1 t_2 r_1 r_2 e^{i\phi t} e^{i\phi'} e^{i2\delta}$$

infatti il secondo raggio ha due riflessioni in più, e una differenza di fase rispetto al primo.



Reiterando questo meccanismo si può ottenere un'espressione per l'N-esimo raggio trasmesso :

$$E_t^{(N)} = \sum_{l=1}^N E_{l,t}$$

$$E_t^{(N)} = \left[ E_0 t_1 t_2 e^{i\phi} e^{i\phi'} \right] \sum_{l=1}^N (r_1 r_2)^l e^{i2l\phi}$$

dove

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda} n d \cos \theta$$

$$\phi' = \frac{2\pi}{\lambda} n d'$$

con  $d$  spessore della lastra e  $n$  suo indice di rifrazione.

Sommando la serie di infiniti raggi si ottiene il campo totale, che si avrà in un punto all'infinito se i raggi (paralleli) si propagano liberi, o nel fuoco di una lente che si può mettere per raccogliarli :

$$E_t = E_0 e^{i\phi'} \frac{t_1 t_2}{1 - r_1 r_2 e^{i2\phi}}$$

Questo per i campi.

Per l'intensità bisogna calcolare il modulo quadro del campo :

$$I_t = I_0 \frac{t_1^2 t_2^2}{1 + r_1^2 r_2^2 - 2 r_1 r_2 \cos 2\phi}$$

(il mio amico Vito dice che ci vuole un 2 al terzo termine al denominatore...)

(39'40")

Il prof fa un inciso sulla differenza tra riflettività e riflettanza : la **riflettività** si riferisce alle ampiezze dei **campi**, mentre la **riflettanza** si riferisce all'**intensità** e dunque ai moduli quadri (delle ampiezze) dei campi.

Per calcolare il campo totale e l'intensità totale del fascio di raggi riflessi potrei calcolare l'altra sommatoria, ma la cosa più semplice è (trascurando le perdite) usare la conservazione dell'energia luminosa :

$$I_0 - I_t = I_r.$$

Riguardo la trasmittanza, nell'ipotesi di assenza (trascurabilità) delle perdite, questa si può scrivere come '1 meno la riflettanza'. Se le perdite non sono trascurabili si devono sottrarre anche le perdite.

Tornando alla radiazione trasmessa, è possibile definire un coefficiente di trasmittanza totale, come il rapporto tra l'intensità 'iniziale' incidente e l'intensità totale del fascio trasmesso :

$$T = \frac{I_t}{I_0} = \frac{(1 - R_1)(1 - R_2)}{\left[1 - (R_1 R_2)^{1/2}\right]^2 + 4 (R_1 R_2)^{1/2} \sin^2 \varphi}.$$

Ribadiamo che la  $\varphi$  che compare al denominatore è la differenza di fase a causa del diverso cammino ottico, e la sua espressione (come si può ricavare da una semplice costruzione geometrica) è :

$$\varphi = \frac{2\varphi}{\lambda} n d \cos \theta$$

dove  $n$  è l'indice di rifrazione,  $d$  è lo spessore della cavità, e  $\theta$  è l'angolo d'incidenza del raggio incidente (nel caso più generale di raggio 'iniziale' incidente non in direzione normale).

La trasmittanza totale è massima quando il denominatore è minimo, cioè quando il seno è nullo, e cioè quando

$$\varphi = m\pi$$

$$\frac{2\varphi}{\lambda} n d \cos \theta = m\pi$$

con  $m$  intero.

Per questi valori di  $\varphi$  e/o di  $d$  si ha dunque la trasmittanza massima che vale :

$$T_{\max} = \frac{(1 - R_1)(1 - R_2)}{\left[1 - (R_1 R_2)^{1/2}\right]^2}.$$

Fisicamente il massimo corrisponde alla situazione in cui tutte le onde fanno interferenza costruttiva.

Nel caso particolare in cui i coefficienti di riflettanza delle due superfici sono uguali si ha :

$$T_{\max} = \frac{(1 - R)^2}{(1 - R)^2} = 1$$

e questo significa che tutta la radiazione incidente viene trasmessa, e quella riflessa è nulla.

Tutto questo lo stiamo dicendo trascurando le perdite (assorbimenti).

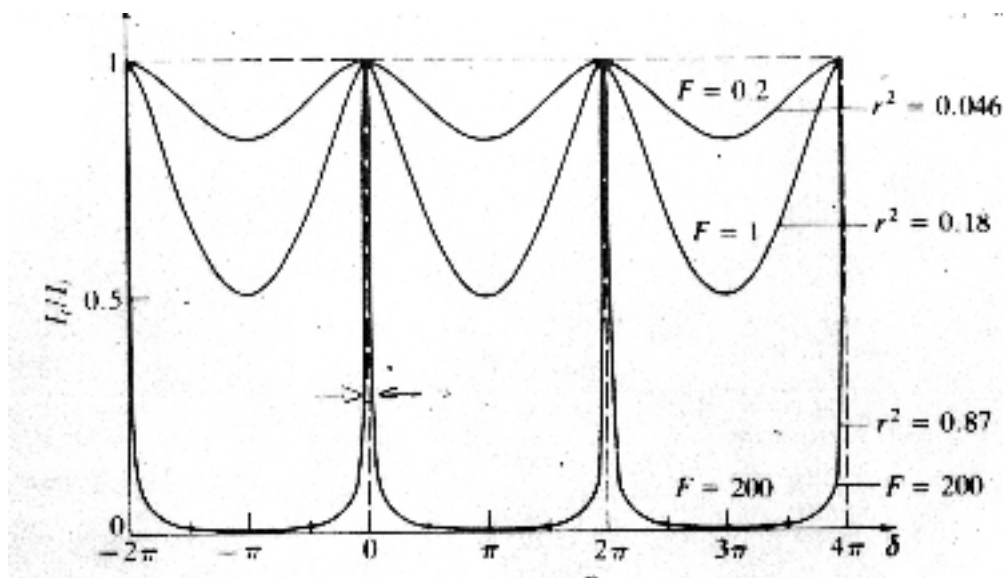
Osserviamo che anche in questo caso questo sistema ottico si può vedere come un filtro : la trasmittanza, fissati  $n$ ,  $d$  e  $\lambda$ , dipende dalla frequenza della radiazione, ed è massima solo per una certa frequenza o suoi multipli (quando si ha *interferenza costruttiva*).

Il prof ribadisce che è da qui che viene il nome di Free Spectral Range : se mandiamo una radiazione policromatica passano solo le frequenze per cui la trasmittività è massima, e l'intervallo di frequenze per cui non passa radiazione è proprio  $c/2d$ .

Comunque questo lo vedremo più in dettaglio tra poco.

Consideriamo la trasmittanza in funzione di  $\delta$ .

Il grafico di questa funzione viene detto *profilo di Ayrie* :



Come appena detto, questo grafico presenta dei massimi per  $\delta = m\lambda$  con  $m$  intero, ma un'altra cosa interessante è che questi massimi diventano sempre più 'sharp' man mano che la riflettività degli specchi aumenta.

In altre parole i minimi si abbassano sempre più, e le 'valli' si appiattiscono.

Il valore di trasmittività (totale) minima si ha quando il denominatore è massimo, e cioè per valori di  $\theta$  che sono multipli dispari di  $\pi/2$ , per i quali  $\sin^2\theta = 1$ .

Per questi valori si ha :

$$T_{\min} = \frac{(1 - R_1)(1 - R_2)}{\left[1 - (R_1 R_2)^{1/2}\right]^2 + 4(R_1 R_2)^{1/2}}$$

Anche per il valore di minimo della trasmittività abbiamo il caso particolare in cui le riflettività degli specchi sono uguali :

$$T_{\min} = \frac{(1 - R)^2}{(1 + R)^2}$$

Osserviamo che questo valore non è uguale a zero, ma vi tende al tendere all' $\infty$  della riflettività degli specchi.

Inoltre, man mano che i minimi si abbassano, i picchi dei massimi diventano più stretti.

Il prof illustra un grafico della funzione di Airy (vedi figura a pag 425), per diversi valori della riflettività.

Fin qui abbiamo fatto queste considerazioni pensando alla cavità Fabry-Perot come ad un interferometro.

Ma se la consideriamo più in generale come cavità risonante, stiamo capendo qualcosa sui modi longitudinali.

Abbiamo già visto che i modi longitudinali sono separati in frequenza di  $c/2d$  (Free Spectral Range), e adesso stiamo vedendo che la loro 'larghezza in frequenza' dipende crucialmente dalla riflettività degli specchi.

- larghezza di riga dei modi (52'40")

Torniamo a studiare la trasmittività, ma questa volta studiamola in funzione della frequenza della radiazione incidente.

Abbiamo detto che i massimi della riflettività si hanno quando  $\theta = m\pi$ .

D'altra parte

$$\theta = \frac{2\pi}{\lambda} n d \cos \theta$$

$$\Delta = \frac{2\lambda}{c} \Delta d'$$

dove abbiamo posto per semplicità

$$d' \equiv n d \cos \theta$$

che diventa  $d' \equiv n d$  nel caso semplice di raggi incidenti perpendicolarmente.

Dunque, la condizione di trasmittività massima, scritta in termini di frequenza diventa :

$$\frac{2\lambda}{c} \Delta d' = m \lambda$$

$$\lambda_m = m \frac{c}{2 d'}$$

E ritroviamo dunque il free spectral range, come separazione in frequenza tra due massimi.

Vogliamo studiare la larghezza di riga, misurata in frequenza, dei modi di una cavità Fabry-Perot.

La larghezza la definiamo come larghezza a metà altezza.

Dunque dobbiamo trovare dove la trasmittanza diventa metà del valore che ha nel massimo.

Si vede che la semilarghezza del picco di trasmittanza, espressa in termini di  $\Delta$  è :

$$\Delta \Delta_c = \frac{1 - (R_1 R_2)^{1/2}}{2(R_1 R_2)^{1/4}}$$

(il prof non fa i conti, ma sono semplici... nel conto si approssima il seno all'angolo, nell'ipotesi che la riflettanza è grande).

Nel caso semplice di specchi con uguale riflettività si ha :

$$\Delta \Delta_c = \frac{1 - R}{2 \sqrt{R}}$$

Ora, ricordiamo che  $\Delta$  è per definizione la differenza di fase di due raggi paralleli contigui, causata dal differente cammino ottico.

Questa dipende dalla frequenza della radiazione stessa, e dunque possiamo esprimere la larghezza del picco in frequenza :

$$\Delta \nu_c = \frac{c}{2d} \frac{1}{d'} 2 \Delta \nu_c$$

$$\Delta \nu_c = \frac{c}{2d} \frac{1}{d'} \frac{1}{2} \frac{(R_1 R_2)^{1/2}}{(R_1 R_2)^{1/4}}$$

dove ricordiamo che  $d' = n d \cos \theta$  (*spessore efficace della lastra*)

Come al solito nel caso particolare di specchi con uguale riflettività si ha un'espressione più semplice :

$$\Delta \nu_c = \frac{1}{\sqrt{R}} \frac{c}{2d} \quad (\text{larghezza dei modi}).$$

(53'40")

- **Finesse (o Finezza)**

Definiamo adesso un importante parametro per un risonatore, e cioè la finezza, o *finesse*.

Abbiamo visto che la larghezza di riga dei modi dipende sia dalla riflettività degli specchi che dalla lunghezza della cavità  $d$ , o meglio dalla lunghezza efficace  $d'$  (saltiamo i convenevoli e consideriamo che la 'lastra' tra due interfacce semiriflettenti è una cavità Fabry Prot a specchi piani e paralleli).

Invece il Free Spectral Range (separazione tra due picchi) dipende solo dalla lunghezza della cavità.

Vogliamo dunque definire un parametro che dia conto di questi aspetti ma che sia indipendente dalla lunghezza della cavità.

La finezza è definita come il rapporto tra il FSR (separazione tra i modi) e la larghezza (in frequenza) dei modi, ed è dunque indipendente dalla lunghezza della cavità :

$$F \equiv \frac{\Delta \nu_{\text{FSR}}}{\Delta \nu_c}$$

$$F = \frac{c}{2d'} \frac{2 \sqrt{d'} \sqrt{2(R_1 R_2)^{1/4}}}{c \sqrt{1 - (R_1 R_2)^{1/2}}}$$

$$F = \frac{\sqrt{2(R_1 R_2)^{1/4}}}{\sqrt{1 - (R_1 R_2)^{1/2}}}$$

Nel caso di specchi con la stessa riflettività si ha l'espressione più semplice :

$$F = \frac{\sqrt{2} \sqrt{R}}{\sqrt{1 - R}}$$

Questa grandezza da conto di quanto sono separati e allo stesso tempo stretti, cioè, in una parola, quanto siano 'risolti' i picchi di intensità di una cavità.

Esempio, per avere un'idea degli ordini di grandezza : consideriamo una cavità lunga  $d = 10$  cm, in aria ( $n \approx 1$ ) su cui incide perpendicolarmente ( $\cos \theta = 1$ ) della radiazione (dunque  $d = d' = 10$  cm), e sia la riflettività dei due specchi pari a  $R = 98\%$ .

Si ha

$$\Delta \nu_{\text{FSR}} = \frac{c}{2d} = \frac{3 \times 10^8}{0.2} = 1.5 \text{ GHz}$$

$$\Delta \nu_c = \frac{1 - R}{\sqrt{R}} \frac{c}{2d} = \frac{1 - 0.98}{\sqrt{0.98}} \frac{3 \cdot 10^8}{2 \cdot 0.1} = 9.6 \text{ MHz}$$

e dunque la finezza è

$$F = \frac{1.5 \text{ GHz}}{9.6 \text{ MHz}} \approx 150$$

Tuttavia, questa è la finezza di una cavità ideale!

Per le cavità reali bisogna tenere conto di due aspetti :

- a) l'irregolarità della superficie degli specchi
- b) il non perfetto allineamento degli specchi

Si dimostra che la 'finesse reale' è la somma in quadratura delle 'finesse relative a

questi singoli fattori' :

$$\frac{1}{F_T} = \sqrt{\sum_i \left( \frac{1}{F_i} \right)^2} .$$

Il prof però non dice assolutamente che cosa sono le 'finezze relative all'irregolarità della superficie degli specchi' o 'finezze relative al non perfetto allineamento degli specchi'. Un indizio è che  $1/F$  relativa all'irregolarità della superficie dello specchio è pari a 50 se lo specchio è lavorato a  $1/50$  della lunghezza d'onda (lavorazione a un cinquantesimo di  $\lambda$ ).

Dunque, considerando una cavità di 1 cm, e con specchi di riflettività del 95% (sempre con radiazione perpendicolare e indice di rifrazione unitario), con una superficie le cui irregolarità sono dell'ordine di  $1/50$  della lunghezza d'onda della radiazione in questione (si dice 'superfici lavorate a  $\lambda/50$ ) e con un angolo di disallineamento (non parallelismo) degli specchi di 0.2", si ha :

$$F_{\text{rifettività}} = 60$$

$$F_{\text{superficie}} = 50$$

$$F_{\text{allineamento}} = 20$$

$$F_{\text{totale}} = 12.$$

- **La cavità come filtro (59'44")**

Dalla definizione di Free Spectral Range abbiamo capito che se facciamo entrare una radiazione monocromatica in una cavità, se essa ha una frequenza che è multiplo del FSR della cavità, si ha una risonanza (la radiazione risuona con una 'frequenza propria', o 'automodo' della cavità).

Se ci mettiamo all'altro capo della cavità, vedremo emergere fotoni, i quali possono aver percorso la cavità una sola volta, oppure tre volte (due andate, e un ritorno, dunque con due riflessioni) o cinque, e così via.

Il fenomeno della risonanza consiste nel fatto che tutti questi fotoni, se hanno frequenza uguale ad una 'frequenza propria' della cavità, uscendo, fanno interferenza costruttiva.

Se invece la frequenza della radiazione non è un automodo, c'è interferenza non costruttiva, e la cavità 'non trasmette la radiazione'.

Poniamoci allora il problema di 'accordare' la cavità con la radiazione.

Questa 'accordatura' si può fare o facendo variare la lunghezza della cavità, o



facendo variare la frequenza della radiazione incidente.

Osserviamo subito che le variazioni di lunghezza della cavità devono essere dell'ordine della lunghezza d'onda; o meglio, di mezza lunghezza d'onda, per passare dalla situazione peggiore di interferenza distruttiva a quella costruttiva.

Notiamo a scanso di equivoci, che il FSR è la distanza in frequenza tra le diverse autofrequenze, mentre (ovviamente) le 'differenze in lunghezza' tra due automodi (cioè le variazioni di lunghezza della cavità per far sì che una fissata frequenza passi dall'essere l' $n$ -esima autofrequenza all'essere l' $n \pm 1$ -esima) è semplicemente la lunghezza d'onda!

Per fare questo si può montare uno dei due specchi su un cristallo piezoelettrico (che varia la sua lunghezza in funzione della tensione che gli si applica).

Gli ordini di grandezza dei voltaggi e delle conseguenti variazioni di lunghezza sono 100 volt  $\rightarrow$  10  $\mu$ m.

Se ad esempio al piezoelettrico si manda una tensione che varia a dente di sega, la cavità può 'spazzare' diverse condizioni di risonanza.

Se si preleva all'uscita della cavità l'intensità della radiazione trasmessa (con un fotodiode) e si collega questo ad un oscilloscopio, agganciando il trigger dell'oscilloscopio al dente di sega che si manda al piezoelettrico (opportunamente deamplificato, per non sfondare l'oscilloscopio!), si visualizzerà una funzione con tanti massimi in corrispondenza delle condizioni di risonanza.

Questa tecnica la possiamo vedere da due punti di vista.

Se sappiamo che la radiazione che stiamo mandando dentro la cavità è molto monocromatica (laser molto 'stretto in frequenza') questa tecnica la possiamo vedere come 'misura della finesse della cavità'.

Se invece sappiamo di avere una cavità con finesse elevata, possiamo considerare questa tecnica come una misura della larghezza di riga della radiazione che sta entrando.

Tutto dipende dalle due larghezze di riga, quella della radiazione e quella della cavità. Se le due sono prossime, avremo dei picchi la cui larghezza è una convoluzione delle due larghezze.

Per fare degli esempi quantitativi vedi conti a pag 428 dei lucidi.

Se vogliamo passare da un massimo di intensità al massimo successivo (spostarci dunque di un FSR) e la radiazione incidente ha  $\lambda = 0.6 \mu$ m si ha che la variazione della lunghezza della cavità necessaria è di

$$\Delta d_{\text{FSR}} = 0.3 \text{ } \mu\text{m}.$$

Infatti la relazione tra il FSR (che è espresso in frequenza) e la lunghezza della cavità è :

$$\Delta \nu_{\text{FSR}} = \frac{c}{2 d}$$

ma  $c = \lambda \nu$ , e quindi, passando alle lunghezze d'onda

$$\Delta \nu_{\text{FSR}} = c \frac{2 d}{c}$$

$$d = \frac{\Delta \nu_{\text{FSR}}}{2}$$

e dunque per variare la 'frequenza passante' della cavità di un intervallo pari a un FSR devo variare la lunghezza della cavità di una quantità pari alla metà della lunghezza d'onda della radiazione incidente.

Allora, se invece vogliamo passare da un massimo di intensità al 50% del massimo (larghezza del picco), possiamo fare il conto utilizzando la finesse, che per definizione è il rapporto tra FSR e larghezza dei picchi, e quindi la variazione della lunghezza della cavità necessaria è di

$$\Delta d_c = \frac{\Delta d_{\text{FSR}}}{F}$$

che per la cavità che abbiamo visto prima (con  $F = 150$ ) viene

$$\Delta d_c = \frac{0.3 \text{ } \mu\text{m}}{150} = 2 \text{ nm}.$$

- **Sistemi di controllo** (inizio lezione 22,  $\approx 3'$ )

Immaginiamo di avere una radiazione di cui 'siamo sicuri', nel senso che conosciamo con piccolo errore la sua frequenza, e sappiamo che questa frequenza è molto stabile (costante nel tempo).

Questo viene definito a volte 'local oscillator'.

Adesso, mandiamo questa radiazione in una cavità.

Se la frequenza corrisponde proprio ad un'autofrequenza della cavità, in trasmissione avremo un massimo di intensità.

In tal caso, sia che la lunghezza della cavità aumenta, sia che diminuisce, vedremo comunque una diminuzione di intensità in trasmissione, e quindi non capiamo se la cavità si sta accorciando o allungando.

Più furbo è dunque mandare una radiazione la cui frequenza si trovi 'sul lato' del picco della curva di 'intensità in trasmissione'.

Se poi ci mettiamo nel flesso, e andiamo a rilevare la derivata (seconda?) dell'intensità (??) qui il prof fa cenno al fatto di modulare il laser, e poi usare un amplificatore lock-in, per ottenere la derivata dell'intensità, ma io non ho capito bene).

In questo modo (con la derivata) abbiamo proprio un 'senale d'errore', che è zero se la lunghezza 'è quella giusta', è positiva se si sposta in un senso, e negativa se si sposta nell'altro.

Un discorso a parte è come ottenere li 'local oscillator'.

Una radiazione laser viene comunque da una cavità, e dunque anche questa potrebbe oscillare.

Un metodo per rendere stabile in frequenza una radiazione è quello di utilizzare la frequenza di risonanza di una transizione di una molecola.

Se mandiamo la radiazione in una cella in cui c'è un gas che assorbe alla frequenza della radiazione, all'uscita della cella avremo una certa intensità.

Se la cavità varia la sua lunghezza, la frequenza della radiazione cambierà, e conseguentemente avremo una variazione nell'intensità all'uscita della cella.

In maniera del tutto analoga a quanto detto poco sopra, se ci mettiamo nel flesso del picco di assorbimento, possiamo capire se la cavità si allarga o si accorcia, e dunque possiamo comandare un sistema di controreazione (piezoelettrico) per compensare queste variazioni.

## • Risoluzione

Torniamo alla questione dell'accordatura di una cavità.

Abbiamo visto che una variazione di lunghezza della cavità di  $\lambda/2$  corrisponde ad una variazione in frequenza sul diagramma dell'intensità in trasmissione, pari a un FSR : passiamo da un modo longitudinale a quello successivo.

Ricordiamo infatti che il profilo di Airy dipende da un seno al quadrato, e quindi per andare da una condizione di massimo all'altra, l'argomento del senoquadrato deve variare di  $\pi$  (nota che la condizione di massimo si ha quando il senoquadrato si annulla).

Per ottenere lo spostamento non pari a un FSR ma pari alla larghezza di un picco dobbiamo dividere lo spostamento di prima per la finezza della cavità, per definizione della finezza.

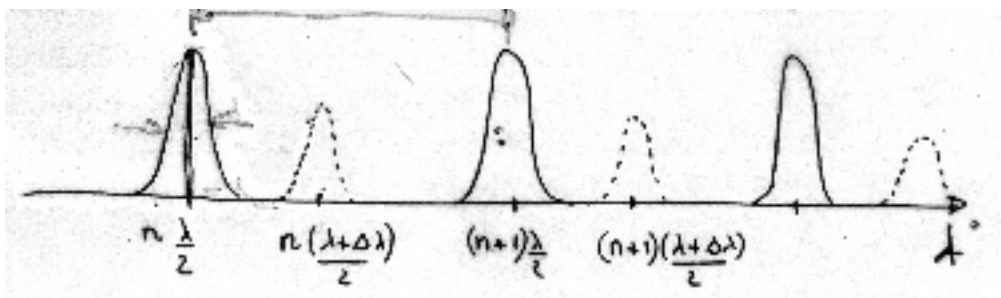
Riguardo alla larghezza di riga della radiazione laser emessa da una cavità, ad un primo approccio potremmo pensare che questa è pari alla larghezza del singolo modo, almeno nel caso in cui un singolo modo oscilla nella cavità.

In realtà vedremo che l'effettiva larghezza di riga della radiazione laser è molto più piccola.

Vediamo che il limite teorico della larghezza di riga di un laser è il millihertz. Nella pratica invece la larghezza è dell'ordine del megahertz o del kilohertz. Il motivo di questa discrepanza è 'il rumore tecnico', cioè l'oscillazione dei modi attorno a valori centrali. Vedremo queste cose meglio in seguito.

Sempre nell'ambito dell'uso della cavità Fabry-Perot come strumento per l'analisi (della larghezza) di una radiazione (laser), immaginiamo di mandare due frequenze diverse,  $\nu$  e  $\nu + \Delta\nu$ .

Se facciamo uno scanning della cavità, con la tecnica del piezoelettrico che abbiamo descritto prima, vedremo due 'famiglie di picchi' sovrapposte :



Se conosciamo la differenza tra le due frequenze che immettiamo, facendo delle proporzioni con il FSR di una delle due famiglie di picchi, possiamo risalire alla frequenza.

Il limite per questo tipo di misure è il fatto che la separazione tra le due frequenze distinte che mandiamo deve essere minore del FSR. Infatti se così non fosse, potremmo conoscere la separazione in frequenza *a meno di un FSR*, in quanto non possiamo conoscere 'l'ordine di un modo', e dunque se vediamo due picchi, uno di una 'famiglia' e uno dell'altra, affiancati, non sappiamo in linea di principio se sono 'dello stesso ordine', a meno che appunto non siamo sicuri che la separazione in frequenza delle due componenti è minore del FSR.

D'altra parte 'all'estremo opposto' se vogliamo usare la cavità Fabry Perot per misurare la larghezza della radiazione (laser) che ci mandiamo, il limite è la finesse della cavità. Infatti osservata la larghezza dei picchi in trasmissione, dobbiamo essere sicuri che questa è dovuta alla larghezza di riga della radiazione e non alla scarsa finesse della cavità (conta chi è più grande).

Dopo aver descritto queste tecniche viene spontaneo definire una *risoluzione* della cavità, vista come rivelatore.

Seguendo il criterio di Rayleigh diciamo che la cavità è in grado di risolvere due modi se la loro separazione in frequenza è minore della larghezza 'propria' dei picchi dei modi della cavità  $\Delta\nu_c$ .

Abbiamo stimato la larghezza del picco come il rapporto tra il FSR e la Finesse della cavità.

Ma abbiamo anche visto che la larghezza del picco, nel caso semplice in cui i due specchi hanno la stessa riflettività, è :

$$\Delta\nu_c = \frac{1-R}{\sqrt{R}} \frac{c}{2d}$$

Il *potere risolutivo* di un qualunque rivelatore è definito come il rapporto tra la lunghezza d'onda (o la frequenza) della radiazione che sta rivelando e la differenza minima di lunghezza d'onda (o di frequenza) che è in grado di risolvere :

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda_{\min}} = \frac{\nu}{\Delta\nu_{\min}}$$

e se scriviamo la differenza di frequenza minima in funzione del FSR e della finesse :

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda_{\text{FSR}}} F$$

Adesso, dobbiamo considerare che all'interno della cavità le frequenze possibili sono solo gli automodi della cavità, e sappiamo che le frequenze di questi sono multipli del FSR, dunque possiamo scrivere :

$$R = \frac{m \Delta\nu_{\text{FSR}}}{\Delta\nu_{\text{FSR}}} F.$$

Allora, in definitiva il potere risolutivo della cavità fabry Perot usata come interferometro è dato da

$$R = m F$$

dove  $m$  è l'ordine di interferenza (ordine dell'automodo) e  $F$  è la finezza.

Questo è un risultato interessante, se lo confrontiamo con il potere risolutivo di un reticolo :

$$R_{\text{ret}} = m N$$

dove  $m$  è in questo caso l'ordine di diffrazione, e  $N$  è il numero di fenditure interessate dalla radiazione.

Questo risultato si può interpretare dicendo che il potere risolutivo di un interferometro è legato al numero di singoli oscillatori che riesce a far interagire tra loro.

Infatti nel caso del reticolo abbiamo il numero di fenditure illuminate, e nel caso della cavità abbiamo la finesse, che è legata alla riflettività degli specchi, e quindi al numero di riflessioni e quindi al numero di onde distinte che si hanno nella cavità.

Ripetiamo che se abbiamo due frequenze  $\omega$  e  $\omega + \Delta\omega$ , possiamo dire qualcosa su  $\Delta\omega$  solo se siamo sicuri 'a priori' che è minore del FSR. In caso contrario possiamo conoscere  $\Delta\omega$  solo a meno del FSR.

- risoluzione delle frequenze nel dominio del tempo.

Vediamo un altro metodo per rivelare la separazione in frequenza di due componenti 'monocromatiche'.

L'idea è di 'passare nel dominio del tempo'.

Innanzitutto, con un beam splitter 'mischiamo i due fasci'.

Poi mandiamo i due fasci sovrapposti in un fotodiode.

All'uscita del fotodiode si avrà una fotocorrente.

Il fotodiode non ha la prontezza sufficiente per seguire l'oscillazione a frequenze ottiche ( $10^{14} \div 10^{15}$  Hz, mentre il fotodiode ha tempi di risposta del nanosecondo, e quindi banda passante dell'ordine dei GHz), quindi quello che si vede sono delle medie.

Tuttavia, se le due frequenze sono abbastanza vicine, il fotodiode può essere in grado di seguire *i battimenti* che si producono per l'interferenza delle due frequenze.

In particolare sul fotodiode arriva un segnale che è :

$$(I_1 + I_2) \cos(2\pi \Delta\nu t).$$

Allora, se una delle due frequenze è nota (local oscillator) posso misurare la differenza in frequenza, e dunque l'altra.

Come si fa a rivelare la 'nota di battimento', che è abbastanza debole?

Un modo è fare la trasformata di Fourier del segnale, in pratica mandando il segnale in uno *spectrum analyzer*.

Questo discorso è fatto nel dominio delle frequenze.  
Lo possiamo vedere anche nel dominio dei tempi.

Immaginiamo di avere un laser, e di volerne misurare la frequenza.

Mandiamo poi questo fascio in un *modulatore acustoottico*.

Si tratta di una sorta di reticolo di diffrazione 'istantaneo' fatto con un liquido trasparente in cui mando un'onda acustica : si ottengono zone a diversa densità, e dunque con un diverso indice di rifrazione, che si possono considerare come delle 'fenditure' di un reticolo.

Allora, 'accendendo' e 'spegnendo' l'onda acustica, possiamo modulare il segnale. Infatti si può fare in modo che quando c'è l'onda acustica il fascio venga deviato per diffrazione.

Inoltre si può anche ottenere che oltre alla deviazione il fascio sia spostato in frequenza, diciamo ad una frequenza  $\omega + \omega_0$ .

A questo punto possiamo far fare un percorso tale che poi si ricombinino. Allora anche in questo caso abbiamo dei battimenti, e dalla nota di battimento possiamo ricavare la larghezza del laser.

In definitiva le cose si possono vedere nel dominio della frequenza o nel dominio del tempo.

Per dare una stima numerica del potere risolutivo di una cavità Fabry Perot,  $\Delta\nu/\nu$  è dell'ordine di  $10^8$ .

- cavità FP come 'calibratore'  
(lucido 433)

Immaginiamo di dover analizzare lo spettro di assorbimento di un certo campione. Abbiamo bisogno di un laser tunabile, in modo da 'spazzare' un certo intervallo di frequenze.

Il problema è che però, quando variamo la frequenza del laser, è difficile capire di quanto abbiamo variato la frequenza.

A questo scopo possiamo usare una cavità F.P..

Con un beam splitter possiamo prelevare una piccola porzione di radiazione (prima che arrivi al campione) e mandarla in una cavità F.P..

Al variare della frequenza, in corrispondenza delle frequenze degli automodi della cavità, in trasmissione dalla cavità avremo dei picchi di intensità. D'altra parte sappiamo che la separazione in frequenza dei picchi deve essere pari al FSR della cavità, che dipende solo dalla lunghezza della cavità ed è quindi noto.

Sapendo l'intervallo di frequenza tra un picco e l'altro possiamo interpolare tutte le altre frequenze.

(Il prof parla di registrare l'andamento dell'intensità di assorbimento all'uscita della cella del campione e la trasmissione della cavità, e poi confrontare le due 'registrazioni in funzione del tempo'.

Per fare degli esempi numerici, con un F.P. di un metro abbiamo un FSR di

$$(3 \times 10^8)/2 = 1.5 \times 10^8 \text{ Hz} = 150 \text{ MHz},$$

e dunque questa è la nostra 'sensibilità in frequenza' delle variazioni della frequenza.

Allora, se dobbiamo 'spazzare' uno spettro di 10 GHz non conviene usare questa cavità, perché avremmo troppi FSR che 'passano' al cambiare della frequenza. Useremo una più corta che ha un FSR più grande.

Se invece dobbiamo spazzare solo 1 GHz, va bene questa cavità, perché in 1 GHz avremo solo 6 - 7 picchi.

Tra l'altro c'è il problema che la lunghezza della cavità è in genere nota con un errore abbastanza grosso (diciamo dell'ordine del millimetro), e quindi anche il FSR ha un errore grandicello.

Se spaziamo un'intervallo di frequenza per misurare il quale dobbiamo 'contare' molti FSR, questo errore, propagandosi, diventa inaccettabile!

Il prof mostra un grafico 'vero' (vedi pag 434).

- Interferometro di Michelson come misuratore assoluto di lunghezza d'onda (travelling Michelson interferometer)  
(40'≈)

Si tratta di un particolare tipo di interferometro Michelson usato specificatamente per la misura della lunghezza d'onda di una radiazione incognita.

La configurazione 'standard' dell'interferometro Michelson è con i quattro bracci 'a croce, due dei quali 'chiusi' da uno specchio (e gli altri due, uno di ingresso e uno di uscita).

Qui invece, anziché chiudere i due 'bracci chiusi', li si fa convergere su uno stesso blocco che ha un retroriflettore su ogni lato (vedi figura a pag 435). Il prof lo chiama 'corner cube'.

Spostando questo 'corner cube' si accorcia un braccio e contemporaneamente si



allunga l'altro della stessa quantità.

In questo modo all' 'uscita' dell'interferometro, man mano che si sposta il 'corner cube' si osservano 'luci e ombre', man mano che la differenza di fase dovuta alla differenza di cammino ottico dà luogo a interferenza costruttiva o interferenza distruttiva.

In particolare ogni spostamento di  $\lambda/2$  corrisponde a un passaggio da un massimo a un minimo di intensità (interferenza).

Diciamo che facciamo compiere al 'corner cube' uno spostamento di un metro : in un tale spostamento ci sarà un numero considerevole di passaggi da massimo a minimo, dell'ordine di un milione.

Supponiamo che la radiazione che mandiamo in questo interferometro viene da un laser stabilizzato, ad esempio un laser He-Ne stabilizzato con una celletta di iodio e un sistema di controreazione (feed back), con la tecnica che abbiamo descritto in precedenza.

Ovviamente ogni sistema di stabilizzazione ha i suoi limiti, e quindi la stabilità è sempre relativa. In particolare si parla di *banda passante* del sistema di controreazione, cioè l'intervallo di frequenze che è in grado di 'compensare'.

Supponiamo inoltre di mandare un secondo fascio di luce, e questa seconda radiazione ha frequenza incognita, che è quella che vogliamo misurare.

È opportuno mandare il fascetto incognito con una direzione leggermente diversa rispetto al 'local oscillator', in modo che anche in uscita questo abbia una direzione diversa, e sia quindi possibile andare a raccogliarlo separatamente, con un altro rivelatore.

A parità di spostamento del corner cube si misureranno un numero diverso di passaggi 'da luce a buio'.

Se non teniamo conto della dipendenza dell'indice di rifrazione dalla lunghezza d'onda, possiamo dire che c'è una proporzione tra il numero di 'frange' e la lunghezza d'onda.

In questo modo, essendo noti i due numeri di frange e una delle due lunghezze d'onda, si può ricavare l'altra lunghezza d'onda :

$$\lambda_x = \lambda_c \frac{N_c}{N_x}$$

Questo strumento si chiama wave meter, o lambda meter.

Abbiamo accennato al fatto che i due raggi 'fanno un cammino geometrico uguale, ma un cammino ottico diverso'. Il fatto è che l'indice di rifrazione dell'aria è diverso

alle due lunghezze d'onda, e quindi l'espressione completa dovrebbe essere :

$$\lambda_x = \lambda_x \frac{N_c}{N_x} \frac{n(\lambda_x, p, T)}{n(\lambda_c, p, T)}$$

Questo è un problema, perché non esiste un'espressione analitica accurata dell'andamento dell'indice di rifrazione dell'aria in funzione della lunghezza d'onda! Inoltre l'indice di rifrazione dipende da molte cose, oltre che dalla lunghezza d'onda : la pressione, l'umidità, la temperatura, etc.

Ci sono delle formule semiempiriche per l'indice di rifrazione.

Insomma, a seconda dell'errore che vogliamo sulla misura della lunghezza d'onda terremo conto di più o meno dipendenze.

Un modo per svincolarsi dall'indice di rifrazione si potrebbe mettere tutto sotto vuoto.

Il prof descrive come si realizza il corner cube viaggiante : su un cuscino d'aria il corner cube viaggia di motorettilineo uniforme, con delle 'molle attive' (solenoidi, energia magnetica) che lo spingono da un lato all'altro.

- altra configurazione di un F. P. come interferometro (49')

Vediamo un'altro tipo di cavità Fabry Perot usata come interferometro.

Prima di entrare nella cavità FP il fascio di luce viene fatto passare per uno 'schermo diffusore (vetro smerigliato?).

Dunque al primo specchio arrivano fotoni con direzione di incidenza diversa. Immaginiamo di 'raggruppare' i fotoni in 'famiglie' con lo stesso vettore d'onda.

Individuiamo una certa famiglia di fotoni, cioè un certo 'raggio (o fascetto) di luce'. Questo entra con una certa inclinazione nella cavità, fa il suo percorso a zig-zag, dovuto a ripetute riflessioni, e dunque in trasmissione ci sono i vari fascetti paralleli, che interferiscono.

Raccogliamo questi fasci in trasmissione con una lente su uno schermo (o mettiamo lo schermo 'all'infinito').

Alla fine avremo un punto sullo schermo in cui ci sarà una certa interferenza, che sarà costruttiva o distruttiva a seconda dell'angolo d'incidenza  $\theta$ , secondo la formula ottenuta in precedenza :

$$T = \frac{I_t}{I_0} = \frac{(1 - R_1)(1 - R_2)}{[1 - (R_1 R_2)^{1/2}]^2 + 4(R_1 R_2)^{1/2} \sin^2 \theta}$$

- interferenza -

$$\text{dove } \theta = \frac{2\lambda}{\lambda} n d \cos \theta.$$

A causa di questo tipo di dipendenza dall'angolo di incidenza, i vari punti di 'buio e luce' sullo schermo formeranno delle bande circolari di buio e luce.

La condizione per il massimo di intensità è, come abbiamo visto in precedenza :

$$m \frac{\lambda}{2} = d \cos \theta$$

dove  $d$  è la lunghezza della cavità e  $m$  è un numero intero che dà l'ordine del massimo di intensità (interferenza costruttiva).

Il punto centrale è l'ordine zero, e poi ci sono i vari anelli, con vari raggi, che rappresentano i vari ordini.

Osserviamo che l'angolo con cui esce il fascio di raggi paralleli in trasmissione dalla cavità, è uguale al raggio con cui entra la 'famiglia di fotoni', cioè il singolo 'fascetto' che viene dallo schermo diffusore.

Chiamiamo con  $\theta_m$  gli angoli con cui emergono i fasci di intensità massima che poi formano i vari anelli, ai vari ordini. Questi sono anche gli angoli di incidenza che soddisfano alla condizione di massimo di trasmissione.

Dunque

$$\cos \theta_m = m \frac{\lambda}{2 d}.$$

Il raggio dei vari anelli di interferenza, poiché lo schermo si trova ad una distanza pari alla focale  $f$  della lente, sono dati da :

$$r_m = f \operatorname{tg} \theta_m$$

$$r_m = f \frac{\sin \theta_m}{\cos \theta_m}$$

Non è detto che il centro di un sistema di anelli di interferenza capiti 'al centro dello schermo', cioè in corrispondenza di  $\theta = 0$ .

Per questo motivo facciamo una 'riscalatura' degli indici  $m$  passando agli indici  $p$ . Inoltre stabiliamo di usare un 'etalon', cioè una porzione di materiale trasparente con due pareti opposte riflettenti, anziché una cavità Fabry Perot:

$$(m_0 - p) \lambda = 2 n d \cos \theta_p$$

dove  $m_0$  è l'ordine che si ha per  $\theta = 0$ , e  $n$  è l'indice di rifrazione del materiale di cui è composto l'etalon.

Adesso facciamo un'approssimazione : nell'ipotesi che gli angoli  $\theta$  con cui i raggi escono dallo schermo diffusore sono piccoli possiamo approssimare

$$\cos \theta_p \approx 1 - \frac{\theta_p^2}{2} :$$

$$(m_0 - p) \lambda = 2 n d \left[ 1 - \frac{\theta_p^2}{2} \right]$$

$$(m_0 - p) \lambda = 2 n d \left[ 1 - \frac{n_0^2}{n^2} \frac{\theta_p^2}{2} \right]$$

dove abbiamo tenuto conto dei diversi indici di rifrazione e quindi di un 'angolo efficace'.

Con considerazioni geometriche si può passare dall'angolo di incidenza-'emersione' al diametro degli anelli di interferenza :

$$(m_0 - p) \lambda = 2 n d \left[ 1 - \frac{n_0^2}{n^2} \frac{D_p^2}{8 f^2} \right]$$

$$[m_0 - (p+1)] \lambda = 2 n d \left[ 1 - \frac{n_0^2}{n^2} \frac{D_{p+1}^2}{8 f^2} \right]$$

da cui

$$D_{p+1}^2 - D_p^2 = \frac{4 n f^2}{n_0^2 d} \lambda.$$

Dunque misurando la differenza tra due diametri consecutivi si può ricavare la lunghezza d'onda.

Tuttavia questa è nota a meno di un FSR!

Per ovviare a questa indeterminazione si manda prima la radiazione in un monocromatore, che fa una prima selezione di una banda passante inferiore al FSR. Dopodiché si mandano le varie componenti quasi monocromatiche in opportuni ETALON, di spessori diversi, per una stima più accurata della lunghezza d'onda. ETALON diversi hanno FSR diversi, e dunque 'sensibilità' (o meglio intervalli entro cui non c'è indeterminazione) diverse.

La peculiarità di questo tipo di lambda meter è che può funzionare anche con laser impulsati, a differenza di quello visto prima, che poteva funzionare solo con i laser in continua.

Infatti

Il vantaggio di questo tipo di 'wavemeter' è che può funzionare anche per i laser impulsati.

Osserviamo che i laser impulsati non possono essere monocromatici più di tanto, non fosse altro che per considerazioni relative alla trasformata di Fourier : se la durata è limitata, la larghezza in frequenza non può essere piccola.

- divagazione sul laser impulsato al femtosecondo  
(58')

A Milano hanno realizzato un laser impulsato al femtosecondo. In questo caso la durata dell'impulso è paragonabile al periodo delle oscillazioni ottiche. Dunque in ogni impulso ci sono poche oscillazioni. Dunque non vediamo più solo l'effetto medio dell'interazione radiazione materia.

Se si mettono degli elettroni, questi vengono scatterati non più in tutte le direzioni, ma in delle direzioni privilegiate, perché il campo non è più mediato, e dunque isotropo.

- Fabry Perot a specchi sferici confocali come interferometro  
(1h 1')

i conti sono un pò più complicati, ma l'allineamento è più stabile!  
Inoltre si riescono ad avere delle finezze più elevate.

Infatti ricordiamo che la 'finezza efficace' dipende oltre che dalla riflettività degli specchi, anche dalla lavorazione delle loro superfici e dal loro allineamento, e sappiamo che le cavità con specchi sferici sono meno sensibili all'allineamento.

- Vita media dei fotoni in una cavità  
(1h 7' 50", pag 440)

Fin'ora abbiamo indagato la radiazione nella cavità nel dominio delle frequenze. Vogliamo studiarla adesso nel dominio del tempo.

La prima domanda che ci poniamo è : quale è il tempo medio che un fotone spende all'interno della cavità?

In altre parole, quanto tempo passa in media tra quando un fotone entra nella cavità e quando dopo un certo numero di riflessioni ne esce?

I motivi per cui può uscire è la non totale riflettività degli specchi, e la diffrazione, che può spedirlo su una traiettoria che esce dalla cavità (apertura finita degli specchi).

Supponiamo che un certo fascio entra nella cavità, con una certa intensità  $I_0$ .

Dopo un percorso di andata e ritorno, che in gergo si chiama *round trip*, l'intensità del raggio si sarà ridotta di una quantità proporzionale alla riflettività degli specchi e che contiene un termine che tiene conto delle perdite dovute alla diffrazione :

$$I(2d) = R_1 R_2 (1 - D_i)^2 I_0$$

dove appunto  $D_i$  rappresenta le perdite 'interne' dovute alla diffrazione.

Il tempo che ci mette un fotone a compiere un round trip è l'inverso del FSR.

Per convincersene si può pensare alla trasformata di Fourier : quello che nel dominio delle frequenze è la larghezza tra un modo e l'altro, nel dominio dei tempi diventa l'intervallo tra una riflessione su uno specchio e la riflessione successiva sullo stesso specchio.

Allora il tempo che impiega un fotone a compiere  $m$  round trip è pari a

$$\tau_m = m \tau$$

$$\tau_m = m \frac{2d}{c}$$

dove quindi  $\tau$  è il tempo di un round trip, ed è l'inverso del FSR (notare che questo fatto che il FSR è l'inverso del tempo di un round trip viene proprio dalla cinematica :  $2d$  è lo spazio percorso, e  $c$  è la velocità).

Detto questo, torniamo all'intensità : se prima abbiamo espresso l'intensità dopo un round trip, dopo  $m$  round trip l'intensità sarà :

$$I(2 m d) = \left[ R_1 R_2 (1 - D_i)^2 \right]^m I_0$$

dove abbiamo usato il fatto che ad ogni round trip bisogna moltiplicare l'intensità

per il fattore di attenuazione.

Adesso dall'intensità in funzione della distanza vogliamo passare al numero di fotoni  $q$  in funzione del tempo :

$$q(\tau_m) = \left[ R_1 R_2 (1 - D_i)^2 \right]^m q_0.$$

Ricordiamo che l'intensità è data dal numero di fotoni moltiplicato per l'energia trasportata dal singolo fotone  $h \nu$ .

Trattandosi di un processo di attenuazione è possibile riscrivere questo andamento come un esponenziale, con un opportuno tempo caratteristico  $\tau_c$ , che possiamo definire come il tempo medio che i fotoni spendono nella cavità :

$$q(\tau_m) = e^{-\frac{\tau_m}{\tau_c}} q_0$$

d'altra parte abbiamo detto che  $\tau_m = m \tau$  e dunque

$$q(\tau_m) = e^{-\frac{m \tau}{\tau_c}} q_0$$

$$q(\tau_m) = \left[ e^{-\frac{\tau}{\tau_c}} \right]^m q_0$$

uguagliando l'espressione con l'esponenziale all'espressione col fattore di attenuazione si ha :

$$\left[ R_1 R_2 (1 - D_i)^2 \right]^m = \left[ e^{-\frac{\tau}{\tau_c}} \right]^m$$

$$R_1 R_2 (1 - D_i)^2 = e^{-\frac{\tau}{\tau_c}}$$

$$\ln \left[ R_1 R_2 (1 - D_i)^2 \right] = -\frac{\tau}{\tau_c}$$

$$\tau_c = \frac{1}{\ln[R_1 R_2 (1 - D_i)^2]}$$

$$\tau_c = \frac{2d}{c \ln[R_1 R_2 (1 - D_i)^2]}$$

Possiamo quindi scrivere un'espressione del numero di fotoni in cavità per un tempo  $t$  generico, e non solo per  $m$  round trip :

$$q(t) = e^{-\frac{t}{\tau_c}} q_0.$$

attenzione, questa è un'approssimazione, perché non è formalmente corretto passare alla variabile continua  $t$ . Inoltre anche la forma esponenziale è un'ansatz più o meno arbitraria.

Dunque in questo modo possiamo ricavare la vita media del fotone nella cavità.

Facciamo un esempio numerico : specchi con riflettività del 98%, trascurando le perdite per diffrazione ( $D_i \approx 0$ ) e con una cavità lunga 30 cm abbiamo :

$$\tau_c = \frac{d}{c} 50$$

$$\tau_c = \frac{0.3}{3 \times 10^8} 50$$

$$\tau_c = 50 \text{ ns.}$$

Associato al tempo di vita media c'è la lunghezza efficace all'interno della cavità, ottenuta moltiplicando il tempo di vita media per la velocità della luce.

Per i valori appena visti si ha

$$l = c \tau_c$$

$$l = 15 \text{ m.}$$

se però usiamo specchi con riflettività di 99.99 otteniamo una lunghezza efficace di 15 Km!!

Qual'è il problema di una cavità con specchi altamente riflettenti (diciamo 99.99%)?



Il problema è che i modi diventano molto stretti (ricordiamo il diagramma di Airy). Questo porta al problema che solo una parte molto piccola dei fotoni che entrano nella cavità sono in risonanza con la cavità, e quindi pochi fotoni 'vanno' negli automodi della cavità.

L'unica è mandare un laser molto potente, oppure un laser molto stretto in frequenza (e con la frequenza che coincide con l'automodo, ovviamente!).

Una cavità passiva è un amplificatore di luce, e il coefficiente di amplificazione è la finezza.

Altro fatto : gli specchi hanno sempre un poco di assorbimento, quindi ogni specchio ha un suo limite sulla potenza ottica che gli arriva sopra. Se si supera questa soglia si spacca lo specchio.

- tecnica per usare anche laser non molto stretto, ma pulsato, per utilizzare cavità con specchi molto riflettenti.

Se mandiamo un singolo impulso di radiazione nella cavità, ad ogni riflessione ci sono un pò di perdite, cioè un pò di fotoni che escono.

Ad ogni riflessione usciranno meno fotoni, perché proprio a causa delle perdite l'intensità dell'impulso decade. Il decadimento è esponenziale, e il tempo caratteristico è la vita media. Dunque rivelando il decadimento in trasmissione possiamo risalire alla vita media. Se d'altra parte conosciamo la riflettività degli specchi questo ci può far risalire alle altre perdite.

Se poi mettiamo del gas nella cavità, per differenza possiamo studiarne l'assorbimento, che compare come una perdita in più.

- fattore di merito  
(1h 25')

Il fattore di merito, definito per i circuiti oscillanti (RLC) può essere definito anche per una cavità.

In generale il fattore di merito è per definizione il rapporto tra l'energia immagazzinata e l'energia persa per ogni ciclo.

Per stimare il fattore di merito partiamo dal risultato appena ottenuto, sulla legge di decadimento dei fotoni nella cavità :

$$q(t) = q_0 e^{-\frac{t}{Q_c}}$$

dal numero di fotoni, e dunque dall'intensità, possiamo arrivare al campo elettrico, estraendo la radice quadrata (compare un 2 al denominatore dell'esponente) :

$$E(t) = E_0 e^{i(\omega_0 t - kz)} e^{-\frac{t}{2\tau_c}}$$

Dunque non si tratta più di un'onda monocromatica perché c'è un fattore di smorzamento dovuto alle perdite.

Se facciamo la trasformata di Fourier, a causa del termine 'di perdita' abbiamo dei conti simili al caso dell'emissione spontanea (verificare), e dunque la  $I(\omega)$  ha un andamento lorentziano :

$$I(\omega) = I_0 \frac{\tau_c^2}{(\omega - \omega_0)^2 + \frac{1}{4\tau_c^2}}$$

Dai conti, per le proprietà della trasformata di Fourier, la larghezza della lorentziana è :

$$\Delta\omega_c = \frac{1}{2\tau_c}$$

$$\Delta\omega_c = \frac{c}{4d} \ln \left[ R_1 R_2 (1 - D_i)^2 \right]$$

che, nel caso particolare in cui possiamo trascurare le perdite per diffrazione e la riflettività degli specchi è uguale, diventa :

$$\Delta\omega_c = \frac{c}{2d} (\ln R)$$

Ma dalla trattazione della cavità Fabry Perot avevamo già ricavato la larghezza di riga dell'emissione. A suo tempo abbiamo trovato l'espressione :

$$I(\omega) = I_0 \frac{(1 - R)^2}{1 - R \sin^2 \omega} \quad (\text{caso particolare } R_1 = R_2 = R)$$

$$\Delta\omega_c = \frac{c}{2d} \frac{1 - \sqrt{R_1 R_2}}{(R_1 R_2)^{1/4}}$$

che nel caso particolare di riflettività uguali diventa :

$$\Delta \lambda_c = \frac{c}{2 \Delta d} \frac{1 \Delta R}{\sqrt{R}}$$

Abbiamo dunque due espressioni diverse per la larghezza di riga, ottenute con due approcci diversi.

Sebbene l'ordine di grandezza sia lo stesso, c'è un termine diverso : in una formula appare  $\Delta \ln R$  laddove nell'altra appare  $\frac{1 \Delta R}{\sqrt{R}}$ .

La formula corretta è la seconda, quella che abbiamo ottenuto a suo tempo studiando la trasmissione della cavità.

Il 'bug' nell'altra è l'approssimazione che abbiamo fatto nel porre  $q(t) = q_0 e^{\frac{t}{\Delta c}}$ ; è un'approssimazione essere passati dalla variabile discreta  $\Delta_m$  alla variabile continua t.

(non ho capito se è discutibile anche proprio l'aver posto (ansatz) che la forma sia esponenziale).

Arriviamo adesso al fattore di merito.

In generale in un circuito risonante il fattore di merito è definito come il rapporto tra l'energia immagazzinata e l'energia persa in ogni ciclo :

$$Q = \frac{\text{energia immagazzinata}}{\text{energia persa in ogni ciclo}} \cdot 2\pi$$

$$Q = \frac{(q \ h \ \Delta)}{h \ \Delta \frac{dq}{dt} \Delta_{\text{periodo}}} \cdot 2\pi$$

$$Q = \Delta \frac{(q \ h \ \Delta)}{h \ \Delta \frac{dq}{dt} T} \cdot 2\pi$$

$$Q = \Delta \frac{(q \ h \ \Delta)}{h \ \Delta \frac{dq}{dt} \frac{1}{\Delta}} \cdot 2\pi$$

$$Q = \frac{(q \cdot h \cdot \nu)}{h \frac{d}{dt} q_0 e^{-\frac{t}{\tau_c}}} \cdot 2 \nu$$

$$Q = \frac{(q \cdot h \cdot \nu)}{h \frac{1}{\tau_c} q_0 e^{-\frac{t}{\tau_c}}} \cdot 2 \nu$$

$$Q = \frac{(q \cdot h \cdot \nu)}{\frac{h}{\tau_c} q} \cdot 2 \nu$$

$$Q = \nu \tau_c \cdot 2 \nu$$

Ma possiamo far entrare in quest'espressione la larghezza di riga di emissione (trasmissione) della cavità ricordando che è :

$$\Delta \nu_c = \frac{1}{2 \nu \tau_c}$$

e dunque

$$Q = \frac{\nu}{\Delta \nu_c} \quad (\text{fattore di merito della cavità})$$

dunque per una cavità ottica è il rapporto tra la frequenza in cavità e la band width in trasmissione.

Se ricordiamo che la band width  $\Delta \nu_c$  è inversamente proporzionale al tempo di vita medio  $\tau_c$ , e che questo è proporzionale alla finezza della cavità possiamo dire che il fattore di merito è proporzionale alla frequenza e alla finezza.

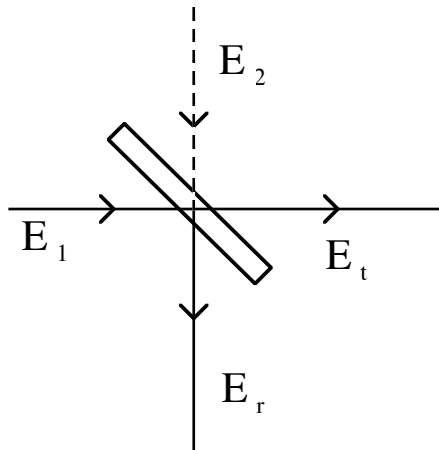
Ma forse il prof si è confuso e intendeva il numero di Fresnel. Infatti con poche perdite e con alta riflettività degli specchi abbiamo un alto tempo di vita media.

Per avere degli ordini di grandezza, per una cavità con lunghezza  $d=90$  cm, con specchi di riflettività uguale e pari a  $R=0.98$ , con una radiazione di frequenza  $\nu=5 \times 10^{14}$  Hz si ha un fattore di merito di  $5 \times 10^8$ .

Il fattore di merito si può definire anche per una transizione atomica, come

rapporto tra la frequenza emessa e la larghezza della riga di emissione.

- Interferometri (Bachor)
- Descrizione classica di un beam splitter (pag96)



Nel caso più semplice c'è un raggio che entra  $E_{in}$ , e il b.s. lo divide in un raggio riflesso  $E_r$  e un raggio trasmesso  $E_t$ , suddividendo l'intensità :

$$|E_r|^2 = \alpha |E_{in}|^2$$

$$|E_t|^2 = (1 - \alpha) |E_{in}|^2$$

Per un b.s. bilanciato  $\alpha = 1/2$  e l'intensità viene divisa in due parti uguali.

Più in generale ci possono essere due raggi incidenti, che dunque vengono 'mescolati' e fatti interferire.

Nel caso di cui fosse il solo fascio  $E_u$ , per esso analogamente si avrebbe

$$|E_r|^2 = (1 - \alpha) |E_u|^2$$

$$|E_t|^2 = \alpha |E_u|^2$$

In generale tutti e quattro i fasci hanno la stessa frequenza, ma fasi diverse :

$$\vec{E}_1 = E_1 e^{i(\omega t + \phi_1)}$$

$$\vec{E}_2 = E_2 e^{i(\omega t + \varphi_2)}$$

$$\vec{E}_r = E_r e^{i(\omega t + \varphi_r)}$$

$$\vec{E}_t = E_t e^{i(\omega t + \varphi_t)}$$

(nota : il segno di vettore vuole esprimere il concetto di fasore, cioè di grandezza con i due gradi di libertà 'ampiezza' e 'fase', e non il carattere vettoriale 'nello spazio', che abbiamo deciso di trascurare).

Notiamo che, nell'ipotesi che tutti i campi abbiano la stessa polarizzazione, possiamo trascurare il carattere vettoriale delle ampiezze.

Affinché sia conservata l'energia (trascurando le dissipazioni) la relazione tra le intensità deve essere :

$$|E_1|^2 + |E_2|^2 = |E_r|^2 + |E_t|^2 .$$

Se la relazione tra le intensità è così facile, non lo è altrettanto quella tra le ampiezze dei campi, in quanto c'è da tener conto delle fasi.

Per semplicità supponiamo che in due fasci incidenti abbiano entrambi fase nulla :

$$\varphi_1 = \varphi_2 = 0.$$

Ciò posto, nel caso semplice di un solo fascio entrante si ha :

$$E_r e^{i(\omega t + \varphi_r)} = \sqrt{R} E_1 e^{i(\omega t + \varphi_1)}$$

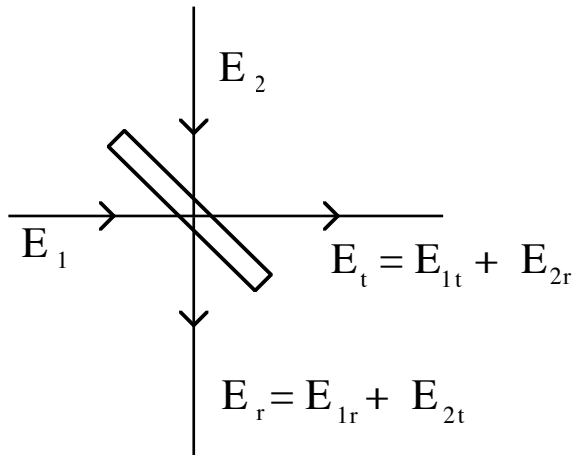
$$E_t e^{i(\omega t + \varphi_t)} = \sqrt{1-R} E_1 e^{i(\omega t + \varphi_1)} .$$

Consideriamo adesso il caso generale.

Nel seguito per semplicità consideriamo implicito dappertutto il termine  $e^{i\omega t}$ .

Per chiarezza diciamo che il fascio in uscita 'verso il basso', che globalmente chiameremo  $E_r$  (perché è la riflessione del fascio entrante  $E_1$ ), è composto da due parti : la riflessione del fascio entrante  $E_1$ , più la trasmissione del fascio entrante  $E_2$ ; allo stesso modo, il fascio uscente 'verso destra', che chiameremo globalmente  $E_t$ , è composto dalla trasmissione di  $E_1$  e dalla riflessione di  $E_2$ .

Graficamente :



Scriviamo adesso i fasci uscenti in funzione di quelli entranti.

A priori, supponiamo che il b.s. abbia un effetto di attenuazione sulle ampiezze (coefficiente di riflettanza  $\rho$ ) e anche un effetto sulle fasi :

$$\begin{cases} \vec{E}_{1t} = \sqrt{1-\rho\rho} \vec{E}_1 e^{i\phi_{1t}} \\ \vec{E}_{1r} = \sqrt{\rho} \vec{E}_1 e^{i\phi_{1r}} \\ \vec{E}_{2t} = \sqrt{1-\rho\rho} \vec{E}_2 e^{i\phi_{2t}} \\ \vec{E}_{2r} = \sqrt{\rho} \vec{E}_2 e^{i\phi_{2r}} \end{cases}$$

d'altra parte, esplicitando le fasi dei fasci entranti :

$$\begin{cases} \vec{E}_{1t} = \sqrt{1-\rho\rho} E_1 e^{i\phi_1} e^{i\phi_{1t}} \\ \vec{E}_{1r} = \sqrt{\rho} E_1 e^{i\phi_1} e^{i\phi_{1r}} \\ \vec{E}_{2t} = \sqrt{1-\rho\rho} E_2 e^{i\phi_2} e^{i\phi_{2t}} \\ \vec{E}_{2r} = \sqrt{\rho} E_2 e^{i\phi_2} e^{i\phi_{2r}} \end{cases}$$

Dunque, i fasci uscenti sono dunque globalmente

$$\vec{E}_r = \vec{E}_{1r} + \vec{E}_{2t} = \sqrt{\rho} E_1 e^{i\phi_1} e^{i\phi_{1r}} + \sqrt{1-\rho\rho} E_2 e^{i\phi_2} e^{i\phi_{2t}}$$

$$\vec{E}_t = \vec{E}_{1t} + \vec{E}_{2r} = \sqrt{1-\rho\rho} E_1 e^{i\phi_1} e^{i\phi_{1t}} + \sqrt{\rho} E_2 e^{i\phi_2} e^{i\phi_{2r}}$$

Ora, imponiamo che si conservi l'energia, cioè che la somma delle intensità entranti sia uguale alla somma delle intensità uscenti :

$$|E_1|^2 + |E_2|^2 = |E_r|^2 + |E_t|^2$$

$$\begin{aligned} |E_1 e^{i\varphi_1}|^2 + |E_2 e^{i\varphi_2}|^2 &= \left| \sqrt{\epsilon} E_1 e^{i\varphi_1} e^{i\varphi_{0r}} + \sqrt{1-\epsilon} E_2 e^{i\varphi_2} e^{i\varphi_{0t}} \right|^2 + \\ &+ \left| \sqrt{1-\epsilon} E_1 e^{i\varphi_1} e^{i\varphi_{0t}} + \sqrt{\epsilon} E_2 e^{i\varphi_2} e^{i\varphi_{0r}} \right|^2 \end{aligned}$$

Per alleggerire la notazione, facciamo l'ipotesi che i due fasci entranti abbiano la stessa fase :

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_0$$

e poniamo (è una semplice riscrittura, sempre lecita) :

$$\varphi_{0t} = \varphi_{0t} + \varphi_0$$

$$\varphi_{0r} = \varphi_{0r} + \varphi_0 .$$

ciò posto si ha

$$\begin{aligned} E_1^2 + E_2^2 &= \left| \sqrt{\epsilon} E_1 e^{i\varphi_0} e^{i\varphi_{0r} + \varphi_0} + \sqrt{1-\epsilon} E_2 e^{i\varphi_0} e^{i\varphi_{0t} + \varphi_0} \right|^2 + \\ &+ \left| \sqrt{1-\epsilon} E_1 e^{i\varphi_0} e^{i\varphi_{0t} + \varphi_0} + \sqrt{\epsilon} E_2 e^{i\varphi_0} e^{i\varphi_{0r} + \varphi_0} \right|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_1^2 + E_2^2 &= \left| \sqrt{\epsilon} E_1 e^{i\varphi_{0r}} + \sqrt{1-\epsilon} E_2 e^{i\varphi_{0t}} \right|^2 + \\ &+ \left| \sqrt{1-\epsilon} E_1 e^{i\varphi_{0t}} + \sqrt{\epsilon} E_2 e^{i\varphi_{0r}} \right|^2 \end{aligned}$$

Ora, in generale si ha

$$\begin{aligned} |a e^{ic} + b e^{id}|^2 &= (a e^{ic} + b e^{id})(a e^{-ic} + b e^{-id}) = \\ &= a^2 + a b e^{i(c-d)} + b a e^{i(d-c)} + b^2 = \\ &= a^2 + b^2 + a b (e^{i(c-d)} + e^{-i(c-d)}) \end{aligned}$$



da cui

$$E_1^2 + E_2^2 = \alpha E_1^2 + (1 - \alpha) E_2^2 + \sqrt{\alpha(1 - \alpha)} E_1 E_2 (e^{i(\phi_{1r} - \phi_{2t})} + e^{-i(\phi_{1r} - \phi_{2t})}) + (1 - \alpha) E_1^2 + \alpha E_2^2 + \sqrt{\alpha(1 - \alpha)} E_1 E_2 (e^{i(\phi_{1t} - \phi_{2r})} + e^{-i(\phi_{1t} - \phi_{2r})})$$

$$E_1^2 + E_2^2 = E_1^2 + E_2^2 + \sqrt{\alpha(1 - \alpha)} E_1 E_2 [(e^{i(\phi_{1r} - \phi_{2t})} + e^{-i(\phi_{1r} - \phi_{2t})}) + (e^{i(\phi_{1t} - \phi_{2r})} + e^{-i(\phi_{1t} - \phi_{2r})})]$$

Dunque, affinché sia conservata l'energia, deve succedere che

$$e^{i(\phi_{1r} - \phi_{2t})} + e^{-i(\phi_{1r} - \phi_{2t})} + e^{i(\phi_{1t} - \phi_{2r})} + e^{-i(\phi_{1t} - \phi_{2r})} = 0$$

$$e^{i(\phi_{1r} - \phi_{2t})} + e^{i(\phi_{1t} - \phi_{2r})} + e^{-i(\phi_{1r} - \phi_{2t})} + e^{-i(\phi_{1t} - \phi_{2r})} = 0$$

$$e^{i(\phi_{1r} - \phi_{2t})} + e^{i(\phi_{1t} - \phi_{2r})} + c.c. = 0$$

ma se un numero complesso è nullo lo è pure il suo complesso coniugato, quindi basta imporre :

$$e^{i(\phi_{1r} - \phi_{2t})} + e^{i(\phi_{1t} - \phi_{2r})} = 0$$

((?) i miei conti non si trovano del tutto col Bachor. Questa storia del complesso coniugato è una possibile spiegazione della discrepanza, ma potrebbe anche dipendere dal fatto che il coefficiente  $\alpha$  è complesso, e dunque introduce una fase..)

Questa condizione può essere soddisfatta per diverse scelte delle fasi; in genere si sceglie :

$$\phi_{2r} = \phi$$

$$\phi_{1t} = \phi_{1r} = \phi_{2t} = 0$$

tuttavia ribadiamo che questa non è l'unica possibilità. Le caratteristiche fisiche dell b.s. determinano quale tra le possibili scelte è quella da considerare.

Con la scelta appena vista si ha, andando a sostituire :

$$\begin{cases} \vec{E}_t = \vec{E}_{1t} + \vec{E}_{2r} = \sqrt{1-\alpha} E_1 e^{i\phi_{1t}} + \sqrt{\alpha} E_2 e^{i\phi_{2r}} \\ \vec{E}_r = \vec{E}_{1r} + \vec{E}_{2t} = \sqrt{\alpha} E_1 e^{i\phi_{1r}} + \sqrt{1-\alpha} E_2 e^{i\phi_{2t}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{E}_t = \vec{E}_{1t} + \vec{E}_{2r} = \sqrt{1-\alpha} E_1 \quad \alpha \sqrt{\alpha} E_2 \\ \vec{E}_r = \vec{E}_{1r} + \vec{E}_{2t} = \sqrt{\alpha} E_1 + \sqrt{1-\alpha} E_2 \end{cases} .$$

La descrizione fisica di questo caso è quella di un b.s. che provoca uno shift di fase di  $180^\circ$  per uno solo dei due fasci riflessi, lasciando inalterata la fase degli altri.

- formalismo matriciale

E' possibile conseguire lo stesso risultato usando un formalismo matriciale :

$$\begin{pmatrix} E_r \\ E_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{1r} & M_{2r} \\ M_{1t} & M_{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix}$$

e, imponendo che la matrice sia unitaria (conservazione dell'energia (vero?)) :

$$|M_{1r}| = |M_{2r}|$$

$$|M_{1t}| = |M_{2t}|$$

$$|M_{1r}|^2 + |M_{1t}|^2 = 1$$

$$M_{1r} M_{1t}^* + M_{2r} M_{2t}^* = 0$$

Ancora una volta queste condizioni lasciano una certa discrezione nella scelta, e per avere il risultato precedente si può scegliere :

$$\begin{pmatrix} M_{1r} & M_{2r} \\ M_{1t} & M_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha} & \sqrt{1-\alpha} \\ \sqrt{1-\alpha} & \alpha \sqrt{\alpha} \end{pmatrix} .$$

- descrizione delle perdite

[...]

- **Beam splitter polarizzatori**

Anziché dividere i fasci entranti 'globalmente', i PBS possono trasmettere o riflettere rispettivamente due diverse 'componenti polarizzate' del fascio.

La convenzione per definire le due componenti è la seguente :

(Bachor pag 98)

\*polarizzazione di tipo p

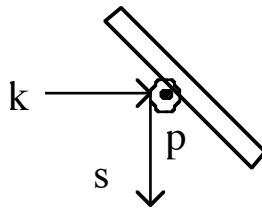
è una polarizzazione lineare in cui il campo elettrico è parallelo al piano del b.s.

(dovendo il campo essere perpendicolare alla direzione del fascio, questa condizione fissa la direzione di polarizzazione)

\*polarizzazione di tipo s

è sempre lineare, ma perpendicolare alla precedente. La direzione di questa seconda polarizzazione ha una componente perpendicolare al piano del b.s. ('s' viene dal tedesco "senkrecht" = perpendicolare)

vedi figura :

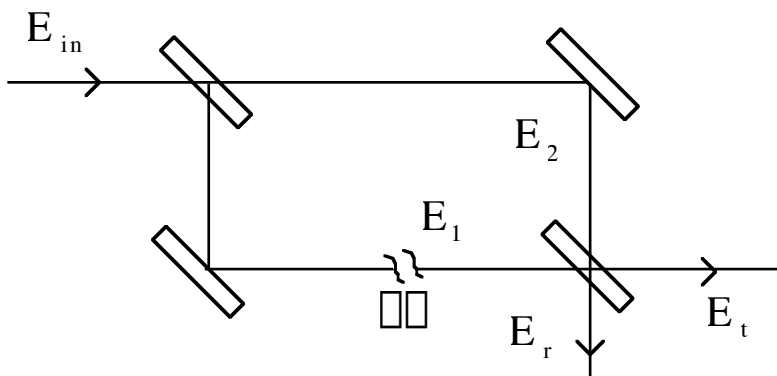


- **Descrizione classica di un interferometro**

Vediamo l'interferometro Mach - Zehnder

Il concetto base è di far interferire due fasci che hanno stessa frequenza, e che magari sono stati originati dallo stesso fascio iniziale, ad esempio con un beam splitter.

I due fasci hanno la stessa frequenza, ma possono avere una differenza di fase, per esempio ottenuta facendo variare con un PZT uno dei due cammini ottici.



Per quanto appena visto riguardo al b.s. deve essere :

$$E_r = \sqrt{\alpha} E_1 e^{i\phi} + \sqrt{1-\alpha} E_2$$

$$E_t = \sqrt{1-\alpha} E_1 e^{i\phi} - \sqrt{\alpha} E_2$$

((?) come mai Bachor mette la differenza di fase a fattore dell'altro fascio, quello che non è stato sfasato??)

Se supponiamo che il b.s. è bilanciato 50/50 si ha  $\alpha=1/2$  e dunque

$$E_r = \sqrt{\frac{1}{2}} E_1 e^{i\phi} + \sqrt{\frac{1}{2}} E_2$$

$$E_t = \sqrt{\frac{1}{2}} E_1 e^{i\phi} - \sqrt{\frac{1}{2}} E_2$$

### - Intensità e conservazione dell'energia

Se consideriamo anche il primo b.s. (anche questo 50/50) si ha

$$E_1 = \sqrt{\frac{1}{2}} E_{in}$$

$$E_2 = \sqrt{\frac{1}{2}} E_{in}$$

Se andiamo a sostituire si ha :

$$E_r = \frac{1}{2} E_{in} e^{i\phi} + \frac{1}{2} E_{in}$$

$$E_t = \frac{1}{2} E_1 e^{i\phi} - \frac{1}{2} E_2$$

e dunque :

- interferenza -

$$\begin{cases} I_r = |E_r|^2 = \left| \frac{1}{2} E_{in} e^{i\phi} + \frac{1}{2} E_{in} \right|^2 \\ I_t = |E_t|^2 = \left| \frac{1}{2} E_{in} e^{i\phi} - \frac{1}{2} E_{in} \right|^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_r = \frac{1}{4} E_{in}^2 + \frac{1}{4} E_{in}^2 + \frac{1}{4} E_{in}^2 (e^{i\phi} + e^{i\phi}) \\ I_t = \frac{1}{4} E_{in}^2 + \frac{1}{4} E_{in}^2 - \frac{1}{4} E_{in}^2 (e^{i\phi} + e^{i\phi}) \end{cases}$$

(abbiamo usato il risultato già visto prima :

$$|ae^{i\phi} + be^{i\phi}|^2 = (ae^{i\phi} + be^{i\phi})(ae^{-i\phi} + be^{-i\phi}) = a^2 + b^2 + ab(e^{i\phi} + e^{-i\phi})$$

$$\begin{cases} I_r = \frac{1}{2} E_{in}^2 + \frac{1}{4} E_{in}^2 2 \cos\phi \\ I_t = \frac{1}{2} E_{in}^2 - \frac{1}{4} E_{in}^2 2 \cos\phi \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_r = I_{in} \frac{1 + \cos\phi}{2} \\ I_t = I_{in} \frac{1 - \cos\phi}{2} \end{cases}$$

da cui, usando le formule di bisezione

$$\cos \frac{\phi}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos\phi}{2}} \quad ; \quad \sin \frac{\phi}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos\phi}{2}}$$

$$\begin{cases} I_r = I_{in} \cos^2 \frac{\phi}{2} \\ I_t = I_{in} \sin^2 \frac{\phi}{2} \end{cases}$$

Per la conservazione dell'energia deve essere  $I_{in} = I_r + I_t$ , come infatti è.

Adesso invece, esprimiamo le intensità dei fasci in uscita non in funzione del fascio 'a monte', ma dei due fasci in entrata del b.s. (facciamo i conti per il caso 50/50) :

$$\begin{cases} I_r = |E_r|^2 = \left| \sqrt{\frac{1}{2}} E_1 e^{i\phi} + \sqrt{\frac{1}{2}} E_2 \right|^2 \\ I_t = |E_t|^2 = \left| \sqrt{\frac{1}{2}} E_1 e^{i\phi} - \sqrt{\frac{1}{2}} E_2 \right|^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_r = \frac{1}{2} E_1^2 + \frac{1}{2} E_2^2 + \frac{1}{2} E_1 E_2 (e^{i\phi} + e^{-i\phi}) \\ I_t = \frac{1}{2} E_1^2 + \frac{1}{2} E_2^2 - \frac{1}{2} E_1 E_2 (e^{i\phi} + e^{-i\phi}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_r = \frac{1}{2} E_1^2 + \frac{1}{2} E_2^2 + E_1 E_2 \cos \phi \\ I_t = \frac{1}{2} E_1^2 + \frac{1}{2} E_2^2 - E_1 E_2 \cos \phi \end{cases}$$

### - Interferenza non perfetta

Nei casi reali i due fasci potrebbero essere non perfettamente coerenti, e/o non perfettamente allineati.

Occorre dunque definire una grandezza che misuri "la bontà (o grado) dell'interferenza".

Definiamo dunque la visibilità o contrasto di un interferometro come :

$$VIS \equiv \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} \quad (\text{visibilità})$$

dove  $I_{\max}$  e  $I_{\min}$  sono rispettivamente la massima e la minima intensità che si rilevano indifferentemente per uno dei due fasci uscenti al variare di  $\phi$ .

Per avere un'idea di quanto buona è la visibilità, è utile considerare non direttamente questa grandezza, ma il suo rapporto con la 'visibilità perfetta', cioè la visibilità calcolata sui valori 'teorici' massimo e minimo di intensità, che sarebbero dunque relativi al caso di interferenza perfetta.

Abbiamo visto prima che

$$\begin{cases} I_r = \frac{1}{2} E_1^2 + \frac{1}{2} E_2^2 + E_1 E_2 \cos \Delta\phi \\ I_t = \frac{1}{2} E_1^2 + \frac{1}{2} E_2^2 - E_1 E_2 \cos \Delta\phi \end{cases}$$

e dunque, ad esempio per  $I_r$ , si ha :

$$\begin{cases} \max [I_r(\Delta\phi)] = I_r(0) = \frac{1}{2} E_1^2 + \frac{1}{2} E_2^2 + E_1 E_2 \\ \min [I_r(\Delta\phi)] = I_r(\pi) = \frac{1}{2} E_1^2 + \frac{1}{2} E_2^2 - E_1 E_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_{\max} = \frac{1}{2} (E_1^2 + E_2^2 + 2 E_1 E_2) \\ I_{\min} = \frac{1}{2} (E_1^2 + E_2^2 - 2 E_1 E_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_{\max} = \frac{1}{2} (E_1 + E_2)^2 \\ I_{\min} = \frac{1}{2} (E_1 - E_2)^2 \end{cases}$$

e dunque

$$VIS_{\text{perf}} \equiv \frac{\frac{1}{2} (E_1 + E_2)^2 - \frac{1}{2} (E_1 - E_2)^2}{\frac{1}{2} (E_1 + E_2)^2 + \frac{1}{2} (E_1 - E_2)^2}$$

$$VIS_{\text{perf}} \equiv \frac{(E_1 + E_2)^2 - (E_1 - E_2)^2}{(E_1 + E_2)^2 + (E_1 - E_2)^2}$$

che si può anche scrivere in funzione delle intensità dei fasci in ingresso, e non delle loro ampiezze :

$$VIS_{\text{perf}} = \frac{(E_1^2 + E_2^2 + 2 E_1 E_2) - (E_1^2 + E_2^2 - 2 E_1 E_2)}{(E_1^2 + E_2^2 + 2 E_1 E_2) + (E_1^2 + E_2^2 - 2 E_1 E_2)}$$

$$VIS_{\text{perf}} = \frac{E_1^2 + E_2^2 + 2 E_1 E_2 \cos \phi - E_1^2 - E_2^2 + 2 E_1 E_2 \cos \phi}{E_1^2 + E_2^2 + 2 E_1 E_2 \cos \phi + E_1^2 + E_2^2 - 2 E_1 E_2 \cos \phi}$$

$$VIS_{\text{perf}} = \frac{4 E_1 E_2 \cos \phi}{2 (E_1^2 + E_2^2)}$$

$$VIS_{\text{perf}} = 2 \frac{\sqrt{I_1 I_2} \cos \phi}{I_1 + I_2} \quad (\text{visibilità perfetta})$$

Dunque in definitiva il parametro che ci interessa è :

$$\cos \phi \equiv \frac{VIS}{VIS_{\text{perf}}} = \frac{1}{2} \frac{I_{\text{max}} - I_{\text{min}}}{I_{\text{max}} + I_{\text{min}}} \frac{I_1 + I_2}{\sqrt{I_1 I_2}} \quad (\text{parametro di visibilità}).$$

- **Descrizione quantistica di un interferometro** (vedi Bachor, pag 109 e segg.)

Ci basiamo sull'interferometro Mach-Zender.

Siano  $A_{\text{in}}$  e  $A_{\text{u}}$  i due fasci in ingresso,  $A_{\text{I}}$  e  $A_{\text{II}}$  i due fasci che si propagano all'interno dell'interferometro, dopo il primo beam splitter, e  $A_1$  e  $A_2$  i due fasci in uscita dall'interferometro, dopo il secondo b.s..

Supponiamo che la trasmittività di entrambi i b.s. sia 1/2.

In tal caso, per quanto visto riguardo ai b.s. si ha :

$$\begin{cases} |A_{\text{I}}\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}} |A_{\text{in}}\rangle - \sqrt{\frac{1}{2}} |A_{\text{u}}\rangle \\ |A_{\text{II}}\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}} |A_{\text{in}}\rangle + \sqrt{\frac{1}{2}} |A_{\text{u}}\rangle \end{cases}$$

mentre all'uscita

$$\begin{cases} |A_1\rangle = e^{i\phi} \sqrt{\frac{1}{2}} |A_{\text{II}}\rangle - \sqrt{\frac{1}{2}} |A_{\text{I}}\rangle \\ |A_2\rangle = e^{i\phi} \sqrt{\frac{1}{2}} |A_{\text{II}}\rangle + \sqrt{\frac{1}{2}} |A_{\text{I}}\rangle \end{cases}$$

da cui, sostituendo :



$$\begin{cases} |A_1\rangle = e^{i\phi} \sqrt{\frac{1}{2}} \left[ \sqrt{\frac{1}{2}} |A_{in}\rangle + \sqrt{\frac{1}{2}} |A_u\rangle \right] - \sqrt{\frac{1}{2}} \left[ \sqrt{\frac{1}{2}} |A_{in}\rangle - \sqrt{\frac{1}{2}} |A_u\rangle \right] \\ |A_2\rangle = e^{i\phi} \sqrt{\frac{1}{2}} \left[ \sqrt{\frac{1}{2}} |A_{in}\rangle + \sqrt{\frac{1}{2}} |A_u\rangle \right] + \sqrt{\frac{1}{2}} \left[ \sqrt{\frac{1}{2}} |A_{in}\rangle - \sqrt{\frac{1}{2}} |A_u\rangle \right] \end{cases}$$

$$\begin{cases} |A_1\rangle = e^{i\phi} \frac{1}{2} |A_{in}\rangle e^{i\phi} + \frac{1}{2} |A_u\rangle - \frac{1}{2} |A_{in}\rangle + \frac{1}{2} |A_u\rangle \\ |A_2\rangle = e^{i\phi} \frac{1}{2} |A_{in}\rangle + e^{i\phi} \frac{1}{2} |A_u\rangle + \frac{1}{2} |A_{in}\rangle - \frac{1}{2} |A_u\rangle \end{cases}$$

$$\begin{cases} |A_1\rangle = \frac{1}{2} (e^{i\phi} - 1) |A_{in}\rangle + \frac{1}{2} (e^{i\phi} + 1) |A_u\rangle \\ |A_2\rangle = \frac{1}{2} (e^{i\phi} + 1) |A_{in}\rangle + \frac{1}{2} (e^{i\phi} - 1) |A_u\rangle \end{cases}$$

ma

$$\begin{aligned} e^{i\phi} + 1 &= e^{i\frac{\phi}{2}} e^{i\frac{\phi}{2}} + e^{i\frac{\phi}{2}} e^{-i\frac{\phi}{2}} \\ &= e^{i\frac{\phi}{2}} \left( e^{i\frac{\phi}{2}} + e^{-i\frac{\phi}{2}} \right) \\ &= e^{i\frac{\phi}{2}} 2 \cos \frac{\phi}{2} \end{aligned}$$

e analogamente

$$(e^{i\phi} - 1) = e^{i\frac{\phi}{2}} 2i \sin \frac{\phi}{2}$$

da cui

$$\begin{cases} |A_1\rangle = e^{i\frac{\phi}{2}} i \sin \frac{\phi}{2} |A_{in}\rangle + e^{i\frac{\phi}{2}} \cos \frac{\phi}{2} |A_u\rangle \\ |A_2\rangle = e^{i\frac{\phi}{2}} \cos \frac{\phi}{2} |A_{in}\rangle + e^{i\frac{\phi}{2}} i \sin \frac{\phi}{2} |A_u\rangle \end{cases}$$